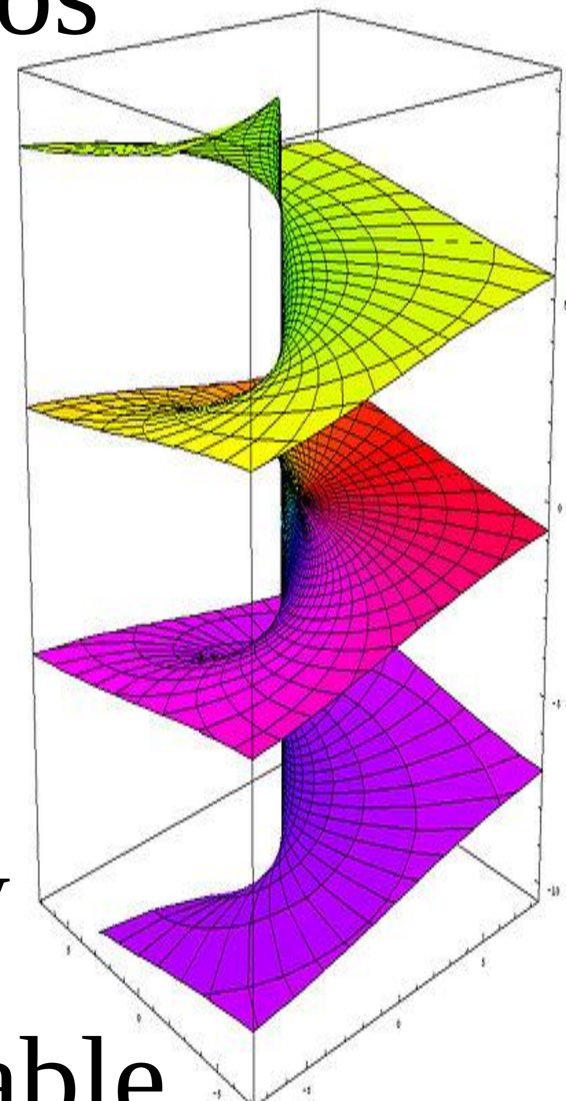
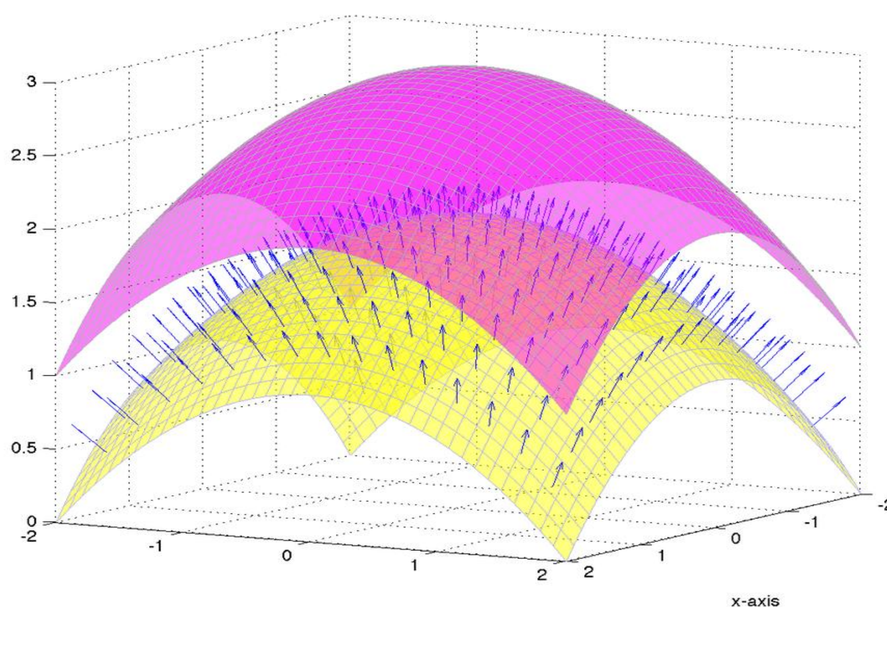
Guía de ejercicios matemáticos para Integrales de Superficie, Campos Conservativos y Cálculo en variable compleja.





Preparado, resuelto y tipeado en Microsoft Word y LaTeX por Venancio E. Besson P.

Introducción

La elaboración de esta guía está motivada a mi gusto particular por las matemáticas aun siendo estudiante de ingeniería, cada ejercicio fue resuelto por mi persona y posteriormente tipeado en las siguientes páginas, para así ayudar al estudiante de cualquier curso de matemáticas o de ingeniería en los siguientes temas:

Calculo vectorial.

- Parametrización de una superficie (Nota teórica: explicación profunda sobre los cambios de variable).
- Cálculo de áreas.
- Integrales sobre campos vectoriales.
- Integrales sobre campos escalares.
- Campos vectoriales conservativos (Nota teórica: relación con ciertos fenómenos físicos).
- Teorema de Gauus.
- Teorema de Stokes.

Cálculo en variable compleja.

- Fórmula de Moîvre (Nota teórica: Explicación del argumento).
- Álgebra de números complejos.
- Funciones analíticas.
- Series de Laurent.
- Integrales complejas por el teorema de los residuos.
- Integrales complejas por la fórmula integral de Cauchy.
- Métodos para resolver integrales impropias reales.

Se debe aclarar que la guía no pretende ser teórica, solo práctica, más sin embargo cuenta con 3 notas que pueden ayudar al estudiante a comprender mejor ciertos temas a tratar. En total la guía cuenta con 52 ejercicios resueltos completamente paso a paso, con explicación detallada haciendo uso de lenguaje técnico y coloquial. De inmediato el lector se encontrará con diversas gráficas que permitirán una mejor explicación sobre los temas, las mismas fueron posibles gracias al programa gratuito de graficación *Geogebra*, que recomiendo ampliamente, también fue de mucha ayuda el programa *PTC Mathcad Prime 3.0* un programa completo y muy utilizado en el área de ingeniería, por último pero no menos importante los programas que me permitieron tipear esta guía fueron Microsoft Word y LaTeX, este último también gratuito lo recomiendo debido a su rapidez y metodología para la escritura de textos con contenido matemático.

Elaborar esta guía fue una educativa experiencia que disfruté de principio a fin, una buena forma de exponer y asentar mis ideas sobre los temas tratados, su principal motivación fue el cálculo de variable compleja y más específicamente el curso de Matemáticas VI (MA-2113) dictado en la universidad Simón Bolívar en el período Enero-Marzo 2015 por el profesor Axel Boza. Reconozco desde este mismo momento que la guía puede siempre mejorar y está abierta a cualquier crítica o corrección pertinente que puede hacerse a través de mi correo venanciobesson@hotmail.com. Sin más que decir que les sea de su agrado y ayuda el siguiente trabajo.

Índice

Calculo vectorial.

Cálculo en variable compleja.

Parametrizaciones

El concepto de las parametrizaciones es ampliamente utilizado en la primera parte y vale la pena tener claro de dónde viene y cómo funciona. Es curioso como esa teoría de “parametrizar una superficie” no es más que un caso particular de los cambios de variable entre sistemas de coordenadas, toda esta teoría será expresada en las coordenadas curvilíneas.

Coordenadas curvilíneas

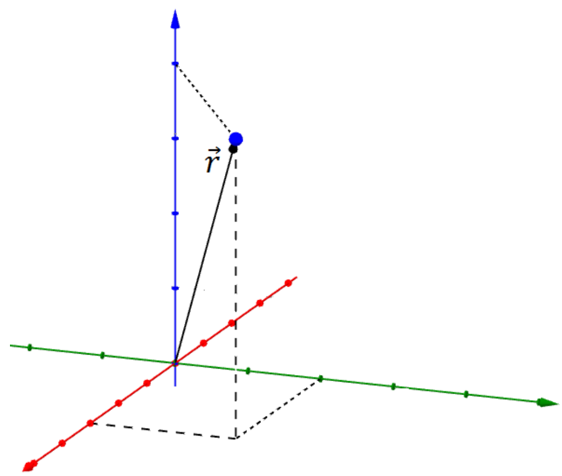
Explican a fondo la teoría de los cambios de coordenadas, ya sea de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas o esféricas (que son las más usadas en ingeniería y que serán las únicas usadas en esta guía).

Primero debemos hablar de dos conceptos importantes antes de pasar a lo demás

1. Vector de posición de un punto en el espacio.

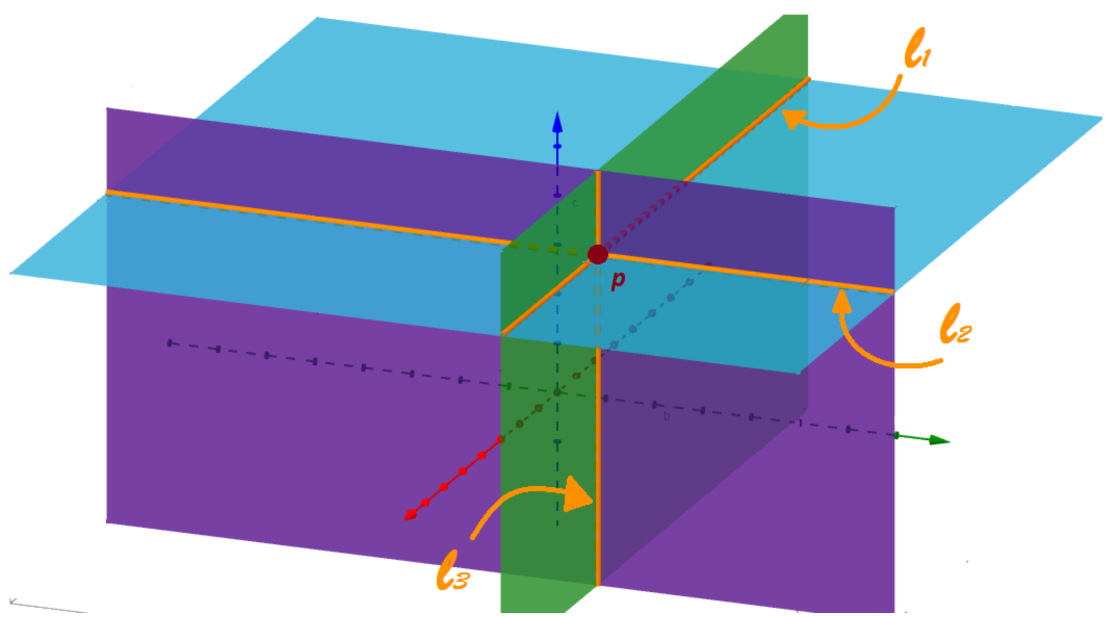
$$\vec{r} = (x, y, z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

No es más que un vector de posición genérico para señalar donde se encuentra cualquier punto en el espacio



2. Representación de un punto en el espacio como la intercepción de tres planos.

Tengamos en cuenta que en el espacio $x = c_1, y = c_2, z = c_3,\ c_1, c_2, c_3 = Cte$, son tres planos perpendiculares, cuya intercepción de los tres resulta en un punto y la intercepción de dos planos resulta en una recta, véase que las tres rectas resultantes de las diferentes intercepciones son perpendiculares entre sí.



Ahora veamos de manera interesante lo que pasa al tomar las diferentes derivadas parciales del vector $\vec{r}$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = 1.\hat{\imath} + 0.\hat{\jmath} + 0.\hat{k}, \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = 0.\hat{\imath} + 1.\hat{\jmath} + 0.\hat{k}, \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = 0.\hat{\imath} + 0.\hat{\jmath} + 1.\hat{k}$$

Tenemos que cada uno de los vectores $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = 1.\hat{\imath}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = 1.\hat{\jmath}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = 1.\hat{k}$ es paralelo y tangente a cada una de las rectas $l1, l2\ y\ l3$ respectivamente, si se quiere también lo son en el punto P.

Si quisiéramos considerar diferenciales de camino para cada eje, por abuso de notación tendríamos

$$\frac{d\vec{r}}{dx} = 1.\hat{\imath} \;\rightarrow\; d\vec{r} = dx.1.\hat{\imath} \;\rightarrow\; d\vec{x} = (dx.1).\hat{\imath}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dy} = 1.\hat{\jmath} \;\rightarrow\; d\vec{r} = dy.1.\hat{\jmath} \;\rightarrow\; d\vec{y} = (dy.1).\hat{\jmath}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dz} = 1.\hat{k} \;\rightarrow\; d\vec{r} = dz.1.\hat{k} \;\rightarrow\; d\vec{z} = (dz.1).\hat{k}$$

Tenemos así unos vectores diferenciales o (diferenciales de camino orientados).

Por último el diferencial de volumen, que resulta de tomar los módulos a los vectores anteriores y multiplicarlos.

$$dV = 1.1.1.dxdydz = dxdydz$$

Todos estos "objetos matemáticos" los hemos definido a partir de los conceptos expresados en 1. y 2. Teniendo claro estos conceptos continuemos.

Los cambios de coordenadas implican poder expresar las variables del primer sistema coordenado como funciones de otras tres variables. Esto de manera general sería como sigue

$$x = x(u_1, u_2, u_3), \qquad y = y(u_1, u_2, u_3), \qquad z = z(u_1, u_2, u_3) \qquad (I)$$

También deberá ser posible expresar las nuevas variables en función de las tres originales.

$$u_1 = u_1(x, y, z), \qquad u_2 = u_2(x, y, z), \qquad u_3 = u_3(x, y, z) \qquad (II)$$

Tanto *(I)* como *(II)* tienen diferentes objetivos en nuestro estudio, que terminarán llevándonos a una misma conclusión.

De *(I)*:

Como *x*, *y* y *z* ahora se expresan en función de nuevas variables, entonces el vector $\vec{r}$ también lo hará.

$$\vec{r} = x(u_1, u_2, u_3)\hat{\imath} + y(u_1, u_2, u_3)\hat{\jmath} + z(u_1, u_2, u_3)\hat{k}$$

Ahora el punto *P* es ubicado por este nuevo vector en el nuevo sistema coordenado.

De *(II)*:

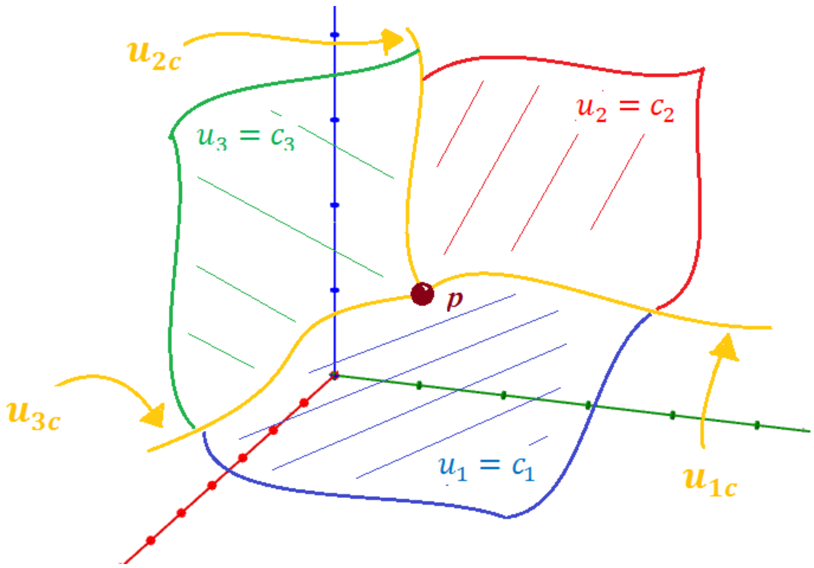
Véase que lo que tenemos en *(II)* son tres campos escalares de la forma $f: R^3 \rightarrow R$, que para valores constantes de u_1, u_2 y u_3 se tendrían diferentes (y además infinitas) superficies de nivel, tomemos entonces tres constantes tales que.

$$u_1 = c_1, \qquad u_2 = c_2, \qquad u_3 = c_3$$

$$c_1 = u_1(x, y, z), \qquad c_2 = u_2(x, y, z), \qquad c_3 = u_3(x, y, z)$$

Las tomamos solo para explicar la teoría que sigue más fácilmente

Si graficáramos esto tendremos



- A las superficies $u_1 = c_1,\ u_2 = c_2,\ u_3 = c_3$ se les llama superficies coordenadas y estas son ortogonales entre sí.
- A las curvas u_{1c}, u_{2c} y u_{3c} que resultan de las diferentes intercepciones de las superficies coordenadas se les conoce como curvas coordenadas.

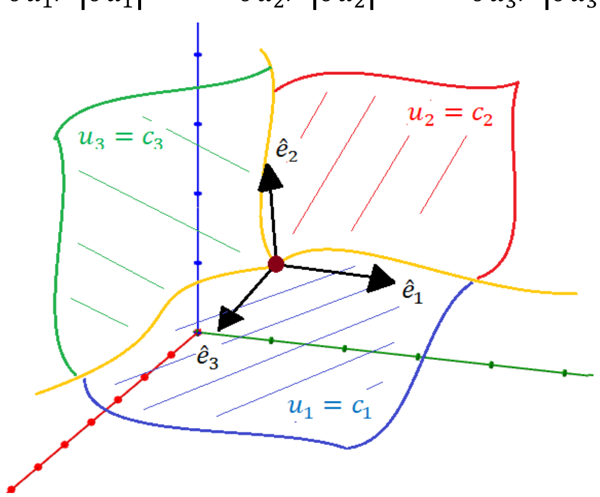
Es de vital importancia que vea la analogía de esta teoría con lo expuesto en los puntos 1. y 2. al principio.

A partir de ahora la idea es ver que significan las derivadas de $\vec{r}(u_1, u_2, u_3)$ es función de los expuesto en *(II)*.

Si tomo $\frac{\partial \vec{r}(u_1,u_2,u_3)}{u_1}$ tendré un vector tangente a la curva u_{1c} en el punto P, análogamente $\frac{\partial \vec{r}(u_1,u_2,u_3)}{u_2}$ y $\frac{\partial \vec{r}(u_1,u_2,u_3)}{u_3}$ serán vectores tangentes a las curvas u_{2c} y u_{3c} en el punto P respectivamente. Entonces ya casi hemos alcanzado nuestro objetivo, construir una base orto-normal de vectores para un nuevo sistema coordenado, lo único que falta es volver a estos vectores unitarios.

$$\hat{e}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \Big/ \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\right|, \quad \hat{e}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \Big/ \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}\right|, \quad \hat{e}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \Big/ \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}\right|$$

Tenemos



Ahora definamos los diferenciales de camino en este nuevo y genérico sistema de coordenadas

$$\hat{e}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \Big/ \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\right| \;\rightarrow\; \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\right| . \hat{e}_1 \;\rightarrow\; \frac{d\vec{r}}{du_1} = \left|\frac{d\vec{r}}{du_1}\right| . \hat{e}_1 \;\rightarrow\; d\vec{r} = du_1 . \left|\frac{d\vec{r}}{du_1}\right| . \hat{e}_1 \;\rightarrow\; d\vec{r} = du_1 . h_1 . \hat{e}_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow\; d\vec{u}_1 = du_1 . h_1 . \hat{e}_1$$

Donde el término $h_1 = \left|\frac{d\vec{r}}{du_1}\right|$ se le llama facto de escala, haciendo este análisis para los vectores restantes, tendremos

$$d\vec{u}_1 = du_1 . h_1 . \hat{e}_1, \qquad d\vec{u}_2 = du_2 . h_2 . \hat{e}_2 , \qquad d\vec{u}_3 = du_3 . h_3 . \hat{e}_3$$

Con estos resultados definamos entonces

$\vec{a} = a_{u_1}\hat{e}_1 + a_{u_2}\hat{e}_2 + a_{u_3}\hat{e}_3$: Un vector genérico donde a_{u_1}, a_{u_2} y a_{u_3} son las componentes.

$d\vec{a} = du_1 . h_1 . \hat{e}_1 + du_2 . h_2 . \hat{e}_2 + du_3 . h_3 . \hat{e}_3$: Un vector diferencial.

$dV = h_1 h_2 h_3 \; du_1 du_2 du_3$: Diferencial de volumen.

$\nabla = \left(\frac{1}{h_1} . \frac{\partial}{\partial u_1} . \hat{e}_1 , \;\; \frac{1}{h_2} . \frac{\partial}{\partial u_2} . \hat{e}_2 , \;\; \frac{1}{h_3} . \frac{\partial}{\partial u_3} . \hat{e}_3\right)$: Operador Nabla.

Note que el término que aparece en el diferencial de volumen $h_1 h_2 h_3$ no es otra cosa que el ya conocido Jacobiano de los cambios de variables que proviene del hecho de que los factores de escala no siempre tienen módulo igual a uno como en las coordenadas cartesianas.

Bien, la pregunta es ¿Dónde aparecen las parametrizaciones en toda esta teoría?

Vea que cuando hacemos un cambio de coordenadas consideramos tres variables completamente nuevas u_1, u_2 y u_3 que definirán los campos escalares con infinitas superficies de nivel (ortogonales entre ellas) que permiten que nos movamos por todo el espacio. Parametrizar una superficie es tomar solo dos variables nuevas u_1 y u_2 dejando la tercera como una constante $u_3 = k$, esto lo que hará será dejar una superficie de nivel fija, mientras que las otras varían, la superficie fija tendrá una forma que dependerá del campo escalar a la que quedó igualada (esfera, cilindro, toro, etc.) mientras que los campos escalares que quedaron (que recuerden son de la forma $f: R^3 \rightarrow R$) me permiten “caminar” o recorrer toda la superficie de nivel que quedó fija en el espacio. Esto es parametrizar, el concepto de construir un vector ϕ donde aparecerán los cambios de coordenadas se hace para luego llegar al vector producto fundamental, pero al considerar los cambios de *x*, *y* y *z* dentro de ϕ lo que se esta aplicando es la teoría de las coordenadas curvilíneas.

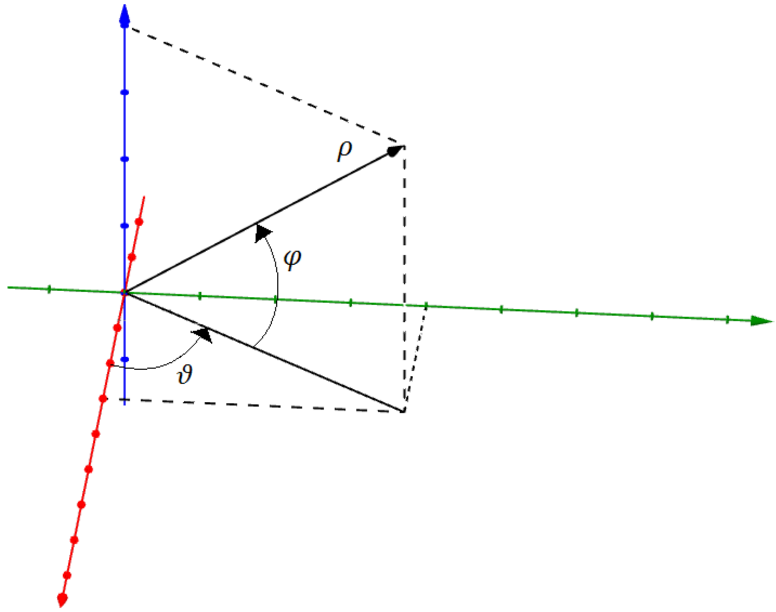
Ejemplo:

Defina toda la teoría de coordenadas curvilíneas para el cambio de coordenadas esféricas, y al final detalle cómo sería la parametrización de una esfera con estas coordenadas.

Solución:

Primero pasaremos a deducir las nuevas variables, esto se puede hacer por simple trigonometría en tres dimensiones y teniendo en cuenta que queremos recorrer todo le espacio.

En al siguiente imagen, Theta (ϑ) es un ángulo que crece desde el eje *x* positivo y que puede llegar a dar una vuelta de 360°; Fi (φ) es un ángulo que crece desde el plano *xy* de manera perpendicular a este y puede llegar a una abertura de 180° (en otras demostraciones φ se toma desde en eje *z* positivo hasta el eje *z* negativo, altera el resultado pero cumple su función igualmente); Rho (ρ) es el módulo del vector de posición de un punto arbitrario en el espacio, va desde cero hasta el infinito.



Aplicando trigonometría al vector para encontrar sus componentes tenemos

$$\begin{cases} x = \rho\, cos(\varphi)\, cos\,(\vartheta) & \rho \in [0, \infty) \\ y = \rho\, cos(\varphi)\, sen\,(\vartheta)\,, & \vartheta \in [0, 2\pi] \\ \quad z = \rho\, sen(\varphi) & \varphi \in [0, \pi] \end{cases}$$

Aquí $u_1 = \rho,\ u_2 = \vartheta,\ u_3 = \varphi$, busquemos ahora $u_1 = u_1(x, y, z),\ u_2 = u_2(x, y, z),\ u_3 = u_3(x, y, z)$

Tomemos los tres cambios y elevémoslos al cuadrado

$$x^2 = \rho^2\, cos^2(\varphi)\, cos^2(\vartheta), \qquad y^2 = \rho^2\, cos^2(\varphi) sen^2(\vartheta)\,, \qquad z^2 = \rho^2\, sen^2(\varphi)$$

Ahora sumemos por separado cada miembro de las ecuaciones (lo que hacemos es resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas).

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \rho^2\, cos^2(\varphi)\, cos^2(\vartheta) + \rho^2\, cos^2(\varphi) sen^2(\vartheta) + \rho^2\, sen^2(\varphi) \\ &= \rho^2 \left(cos^2(\varphi)\, cos^2(\vartheta) + cos^2(\varphi) sen^2(\vartheta) + sen^2(\varphi) \right) \\ &= \rho^2 \left(sen^2(\varphi) + cos^2(\varphi) . \left(cos^2(\vartheta) + sen^2(\vartheta) \right) \right) = \rho^2 \ \rightarrow \ \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

Tomemos solo los valores de *x* y *y* elevémoslos al cuadrado, luego tomemos el valor de *z* elevémoslo a cuadrado y tomamos este resultado para dividirlo entre el resultado de lo primero

$$x^2 + y^2 = \rho^2\, cos^2(\varphi)\, cos^2(\vartheta) + \rho^2\, cos^2(\varphi) sen^2(\vartheta) = \rho^2\, cos^2(\varphi)$$

$$z^2 = \rho^2\, sen^2(\varphi)$$

$$\frac{z^2}{x^2 + y^2} = \frac{\rho^2\, sen^2(\varphi)}{\rho^2\, cos^2(\varphi)} = \frac{sen^2(\varphi)}{cos^2(\varphi)} = tan^2(\varphi) \ \rightarrow \ \left(\frac{z}{tan(\varphi)} \right)^2 = x^2 + y^2$$

Por último tomemos los valores de *x* y *y* y dividámoslos como sigue

$$\frac{x}{y} = \frac{\rho\, cos(\varphi)\, cos(\vartheta)}{\rho\, cos(\varphi)\, sen(\vartheta)} = tan(\vartheta) \ \rightarrow \ y = tan(\vartheta) x$$

Analicemos nuestros resultados e identifiquemos las superficies coordenadas

$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$: Infinitas esferas con centro en el origen y de radio ρ

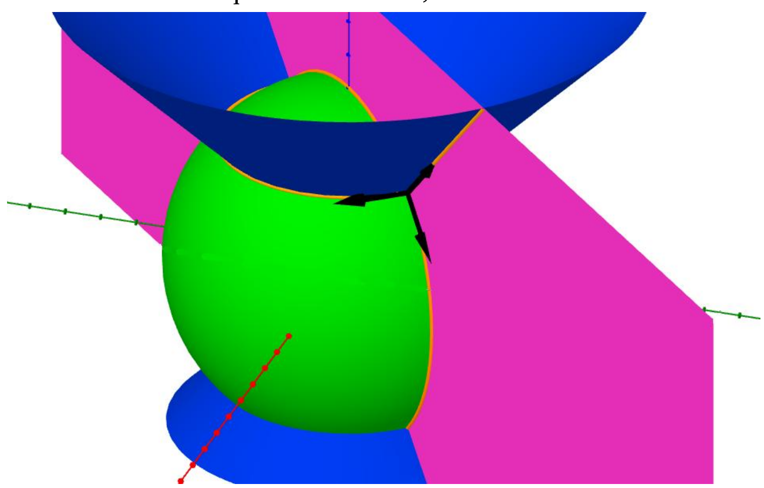
$\left(\frac{z}{tan(\varphi)}\right)^2 = x^2 + y^2$: Infinitos conos con centro en el origen y de aperturas que varían con el valor de φ.

$y = tan(\vartheta)x$: Infinitos planos paralelos al eje z que pasan por el origen, si veo estos planos como rectas en el plano xy las pendientes varían con el valor de ϑ.

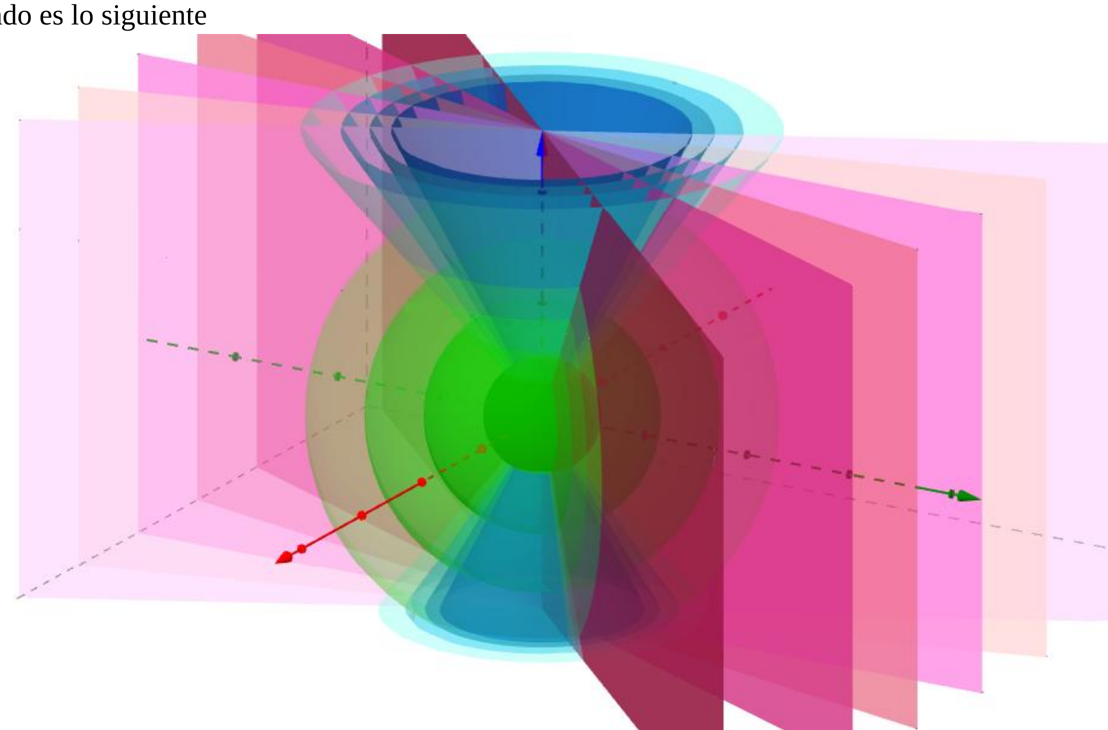
Más aun se prometió el despeje explícito de las variables ρ, φ y ϑ.

$$\rho = \pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad \varphi = \begin{cases} ctan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) : z > 0 \\ \pi : z = 0 \\ \pi - ctan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) : z < 0 \end{cases}, \qquad \vartheta = \begin{cases} tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) : x > 0, y > 0 \\ \pi - tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) : x < 0, y > 0 \\ \pi + tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) : x < 0, y < 0 \\ 2\pi - tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) : x > 0, y < 0 \\ \pi : y = 0 \\ \pi/2 : x = 0 \end{cases}$$

Si tomamos un valor constante arbitrario para ρ, φ y ϑ, entonces veremos las superficies y curvas coordenadas, además de los vectores orto-normales que se formarían, más adelante los obtendremos analíticamente



Recuerde que esto es un caso particular de tomar las variables e igualarlas a constantes, en realidad lo que está pasando es lo siguiente



Expresemos el vector posición con las nuevas coordenadas

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} = \rho\, cos(\varphi)\, cos\,(\vartheta)\hat{\imath} + \rho\, cos(\varphi)\, sen\,(\vartheta)\hat{\jmath} + \rho\, sen(\varphi)\hat{k}$$

Busquemos a partir de aquí los vectores orto-normales.

$$\frac{d\vec{r}}{d\rho} = cos(\varphi)\, cos\,(\vartheta)\hat{\imath} + cos(\varphi)\, sen\,(\vartheta)\hat{\jmath} + sen(\varphi)\hat{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\vartheta} = -\rho\, cos(\varphi)\, sen(\vartheta)\,\hat{\imath} + \rho\, cos(\varphi)\, cos(\vartheta)\,\hat{\jmath}$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = -\rho\, sen(\varphi)\, cos(\vartheta)\,\hat{\imath} - \rho\, sen(\varphi) sen\,(\vartheta)\hat{\jmath} + \rho\, cos(\varphi)\,\hat{k}$$

Calculamos los módulos

$$\left|\frac{d\vec{r}}{d\rho}\right| = \sqrt{(cos(\varphi)\, cos\,(\vartheta))^2 + (cos(\varphi)\, sen\,(\vartheta))^2 + (sen(\varphi))^2} = 1 = h_\rho$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{d\vartheta}\right| = \sqrt{(\rho\, cos(\varphi)\, sen(\vartheta))^2 + (\rho\, cos(\varphi)\, cos(\vartheta))^2} = \rho\, cos(\varphi) = h_\vartheta$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{d\varphi}\right| = \sqrt{(\rho\, sen(\varphi)\, cos(\vartheta))^2 + (\rho\, sen(\varphi) sen\,(\vartheta))^2 + (\rho\, cos(\varphi))^2} = \rho = h_\varphi$$

Entonces los vectores unitarios son

$$\hat{e}_\rho = cos(\varphi)\, cos\,(\vartheta)\hat{\imath} + cos(\varphi)\, sen\,(\vartheta)\hat{\jmath} + sen(\varphi)\hat{k}$$

$$\hat{e}_\vartheta = -\,sen(\vartheta)\,\hat{\imath} + cos(\vartheta)\,\hat{\jmath}$$

$$\hat{e}_\varphi = -\,sen(\varphi)\, cos(\vartheta)\,\hat{\imath} - \,sen(\varphi) sen\,(\vartheta)\hat{\jmath} + cos(\varphi)\,\hat{k}$$

No hay que confundirse en cuanto a que los vectores de este sistema de coordenadas estén expresados en función de los vectores unitarios del sistema de coordenadas cartesianas $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$, ya que estos son la base principal de toda teoría vectorial en el espacio, todo nuevo sistema coordenado estará expresado en función del cartesiano.

El vector diferencial es

$$d\vec{a} = 1.\, d\rho.\, \hat{e}_\rho + \rho\, cos(\varphi)\,.\, d\vartheta.\, \hat{e}_\vartheta + \rho.\, d\varphi.\, \hat{e}_\varphi$$

Diferencial de volumen (Jacobiano)

$$dV = \rho^2\, cos(\varphi) d\rho d\varphi d\vartheta$$

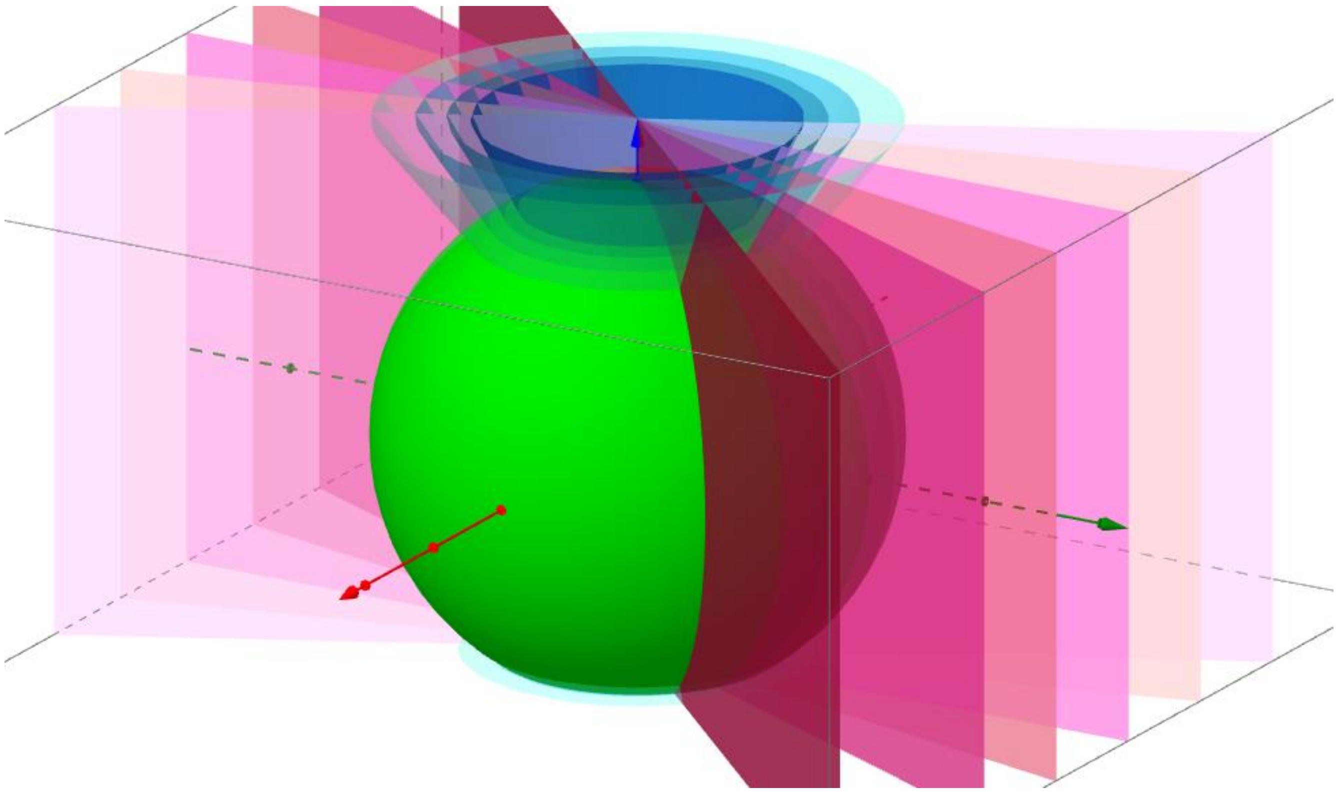
Operador Nabla

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial\rho}.\,\hat{e}_\rho, \qquad \frac{1}{\rho\, cos(\varphi)}.\frac{\partial}{\partial\vartheta}.\,\hat{e}_\vartheta, \qquad \frac{1}{\rho}.\frac{\partial}{\partial\varphi}.\,\hat{e}_\varphi\right)$$

Para finalizar, ¿Qué es parametrizar una esfera? Simple, es tomar el campo escalar $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y decir $\rho = cte = k$ entonces se creará una esfera de radio *k* y los otros campos escalares $\left(\frac{z}{tan(\varphi)}\right)^2 = x^2 + y^2$ y $y = tan(\vartheta)x$ quedan iguales.

Las superficies coordenadas de los campos que siguen variando en el espacio solo pueden recorrer la superficie de la esfera de radio k y es así como con solo dos variables ϑ y φ puedo recorrer un objeto que está en tres dimensiones. Eso es parametrizar una superficie.

El vector normal a la esfera debería ir en la dirección de $\hat{e}_\rho$ ¿verdad? Bueno haga el producto cruz de $\hat{e}_\vartheta$ y $\hat{e}_\varphi$ y llegará a la misma respuesta que usando la definición del vector producto fundamental unitario, no olvide que en el fondo esto es lo mismo.



Ejercicio 1: *Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie S_1 en el punto P.*

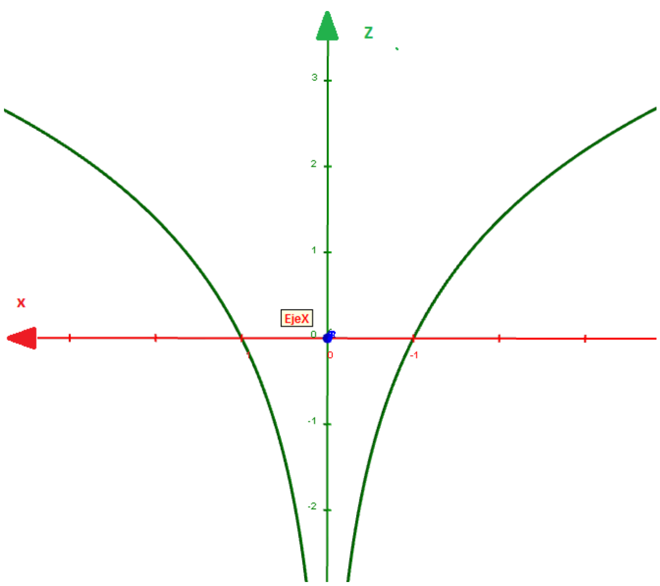
$$S_1 : \{z = Ln(x^2 + y^2)\}, \qquad P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Solución:

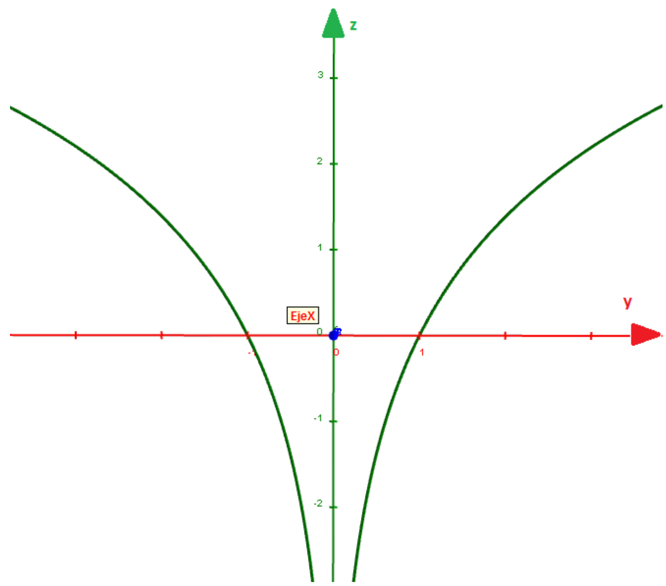
Primero que nada debemos graficar la superficie que se nos está dando (si es posible hacerlo por métodos sencillos).

Para este caso es recomendable ver qué sucede cuando hacemos cero algunas de las variables de las que depende el campo escalar (que en este caso es nuestra superficie), esto inmediatamente convierte la superficie de R^3 a una en R^2 la cual tal vez nos pueda servir para encontrar la verdadera superficie en tres dimensiones.

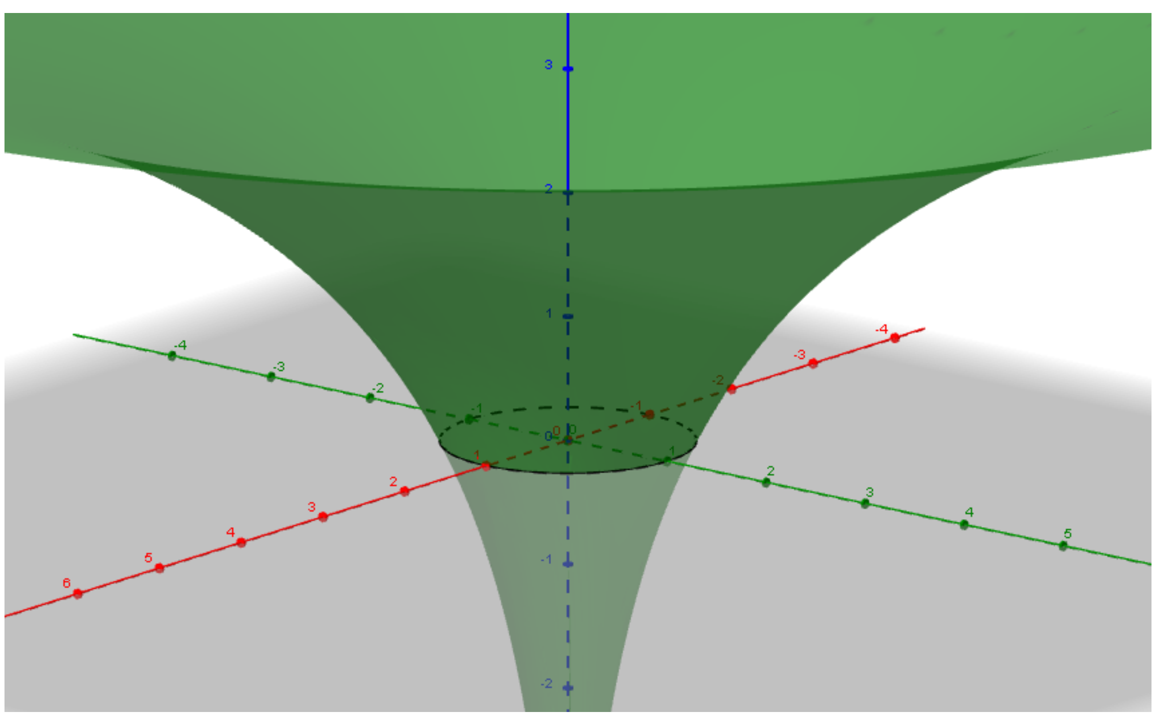
Si y = 0



Si x = 0



Entonces la superficie a tratar es esta.



Aquí el eje z es azul el eje x es rojo y el eje y es verde (en la guía se seguirá siempre esta convención).

La idea está en hacer "desaparecer" uno de los ejes y analizar que pasa en el plano que quedó, esto es recomendable más no significa que toda superficie pueda ser vista de esta forma. La forma final en 3D que nos quedó la obtenemos de pensar que pasaría si tomo un plano lo "encajo" en el eje z (esto es que se hace paralelo al eje z y además lo corta en todos su infinitos puntos) y lo hago girar tomando el eje z como eje y veo que figura me queda en el plano cada vez que lo giro, el resultado no es otro que el obtenido arriba (los casos que tomamos son particulares tomando solo los planos x=0 y y=0). Esta técnica es importante aprenderla, puede ayudar mucho a graficar superficies, de hecho la nombro aquí para enseñarla, la verdad para resolver el ejercicio en si no era sumamente necesario.

Como sé que se tendrá que trabajar con esta superficie es necesario parametrizarla, en este caso lo haremos con coordenadas cilíndricas, ya que se tiene un eje central (el eje z) a la superficie y la misma "crece" de manera uniforme al rededor de este.

$$\phi = \begin{bmatrix} x = \rho\cos(\vartheta) \\ y = \rho\sin(\vartheta) \\ z = \ln(\rho^2\cos^2(\vartheta) + \rho^2 sin^2(\vartheta)) \end{bmatrix}$$

Recordemos que las parametrizaciones de superficies dependen de solo dos variables, en este caso la distancia deleje z a la superficie no es constante, varía y por lo tanto de considerar la parametrización cilíndrica esa distancia es ρ, Theta es por supuesto la variable que "gira" a Ro, entonces ya están listas las dos variables de la parametrización, la pregunta que puede surgir, es que pasa con z, bueno tenemos una expresión que relaciona a las variables x e y que hemos sustituido por las expresiones que dependen de Theta y Ro y tienen despejada a z de manera explícita, lo que hicimos fue sustituir esas expresiones en $z = Ln(x^2 + y^2)$. Así.

$$\phi = \begin{bmatrix} x = \rho\cos(\vartheta) \\ y = \rho\sin(\vartheta) \\ z = 2\ln(\rho) \end{bmatrix}$$

Calculamos ahora los vectores que irán en el producto cruz.

$$\frac{d\phi}{d\rho} = \phi_\rho = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \\ \frac{2}{\rho} \end{bmatrix}, \qquad \frac{d\phi}{d\vartheta} = \phi_\vartheta = \begin{bmatrix} -\rho\sin(\vartheta) \\ \rho\cos(\vartheta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos entonces el vector producto fundamental que es siempre perpendicular a la superficie.

$$(\phi_\rho \text{ x } \phi_\vartheta) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) & \frac{2}{\rho} \\ -\rho\sin(\vartheta) & \rho\cos(\vartheta) & 0 \end{vmatrix} = (2\cos(\vartheta), 2\sin(\vartheta), -\rho)$$

El siguiente paso es ver el análogo del punto P que está en tres dimensiones en su equivalente de 2 dimensiones, esto es esencialmente un sistema de ecuaciones de dos incógnitas no lineal.

Se sabe que el punto P tiene una componente x otra y y otra z.

$$p = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pero definimos hace un momento que toda x, y y z se vería diferentes con nuestro cambio de variables, así.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \rho\cos(\vartheta) \;\; (I)$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \rho\sin(\vartheta) \;\; (II)$$
$$0 = 2\ln(\rho) \;\; (III)$$

De (III): $\rho = 1$, sustituyendo este valor en (I) y (II) y recordando trigonometría $\vartheta = \frac{\pi}{4}$

Entonces el punto P se convierte en

$$P' = \left(1, \frac{\pi}{4}\right)$$

Como el vector producto fundamental es un vector siempre perpendicular a la superficie, si sustituimos este punto P' en el vector tendemos un vector normal en el punto P, y lo más importante este vector obtenido será un vector en R^3. Ya que las componentes del vector son tres.

$$(\phi_\rho \text{ x } \phi_\vartheta) = \begin{bmatrix} 2\cos(\vartheta) \\ 2\sin(\vartheta) \\ -\rho \end{bmatrix}, \qquad (\phi_\rho \text{ x } \phi_\vartheta)|_{P'} = \begin{bmatrix} 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{n} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

Así teniendo un punto y un vector normal podemos construir la ecuación del plano tangente.

$$\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).\sqrt{2} + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).\sqrt{2} + (z).(-1) = 0$$
$$\sqrt{2}x - 1 + \sqrt{2}y - 1 - z = 0$$
$$\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - z = 2$$

Respuesta:

$$\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - z = 2$$

Cuando se tienen expresiones de campos escalares que representen superficies y en estos tengan un término como $x^2 + y^2$, se les llamará superficies de revolución, para estas superficies es recomendable utilizar parametrizaciones por coordenadas cilíndricas. Y si aún se tienen dudas sobre si se eligió la parametrización correcta véase el término z de la parametrización una vez simplificado (en nuestro caso era $2\ln(\rho)$) si este término no depende de ϑ entonces no existe nada parecido a una superficie esférica en el campo escalar que nos dieron y la parametrización funcionará bien, en este caso sabíamos que no era así porque nos tomamos la molestia de graficar la superficie, pero en el ejemplo siguiente no lo haremos.

Ejercicio 2: *Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie S_1 en el punto P.*

$$S_1 : \left\{ z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy \right\}, \qquad P = (3,4,-7)$$

Solución:

Veo que existe una superficie de revolución por el término $\sqrt{x^2 + y^2}$ en el campo escalar por lo que la parametrización por coordenadas cilíndricas puede ser una buena opción, y el ejercicio no requiere que se conozca gráficamente la superficie por lo que inicio con la parametrización.

$$\phi = \begin{bmatrix} x = \rho\cos(\vartheta) \\ y = \rho\sin(\vartheta) \\ z = \sqrt{\rho^2\cos^2(\vartheta) + \rho^2 sin^2(\vartheta)} - \rho^2 \cos(\vartheta)\sin(\vartheta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x = \rho\cos(\vartheta) \\ y = \rho\sin(\vartheta) \\ z = \rho - \rho^2 \cos(\vartheta)\sin(\vartheta) \end{bmatrix}$$

La expresión de z depende de ϑ por lo que la parametrización puede no ser la mejor de todas, esto lo que quiere decir es que algunos cálculos no den expresiones muy cómodas, pero la parametrización está hecha y puede funcionar. Empecemos a buscar las derivadas parciales ϕ para dar con el vector producto fundamental.

$$\phi_\rho = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \\ 1 - 2\rho.\cos(\vartheta).\sin(\vartheta) \end{bmatrix}, \qquad \phi_\vartheta = \begin{bmatrix} -\rho\sin(\vartheta) \\ \rho\cos(\vartheta) \\ \rho^2(sin^2(\vartheta) - \cos^2(\vartheta)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho\sin(\vartheta) \\ \rho\cos(\vartheta) \\ -\rho^2(\cos^2(\vartheta) - sin^2(\vartheta)) \end{bmatrix}$$

$$(\phi_\rho \text{ x } \phi_\vartheta) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) & 1 - 2\rho.\cos(\vartheta).\sin(\vartheta) \\ -\rho\sin(\vartheta) & \rho\cos(\vartheta) & -\rho^2\left(\cos^2(\vartheta) - sin^2(\vartheta)\right) \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} p(p.\sin(\vartheta) - \cos(\vartheta) \\ p(p.\cos(\vartheta) - \sin(\vartheta) \\ p \end{bmatrix}$$

Ya tenemos el vector, ahora buscamos el análogo en el dominio de Ro y Theta del punto P. Recordemos que esto no es más que un sistema de ecuaciones de dos incógnitas no lineal.

$$\begin{gathered} 3 = \rho\cos(\vartheta) \ \ (I) \\ 4 = \rho\sin(\vartheta) \ \ (II) \\ -7 = \rho - \rho^2\cos(\vartheta)\sin(\vartheta) \ \ (III) \end{gathered}$$

Estos sistemas se resuelven valiéndonos de identidades trigonométricas, generalmente.

Si tomamos (I) y (II) las elevamos al cuadrado y sumamos tenemos:

$$\rho^2\cos^2(\vartheta) + \rho^2\sin^2(\vartheta) = 4^2 + 3^2 \ \rightarrow \ \rho^2(\cos^2(\vartheta) + sin^2(\vartheta)) = 25 \ \rightarrow \ \rho^2 = 5^2, para\ \rho > 0 \ \rightarrow \ \rho = 5$$

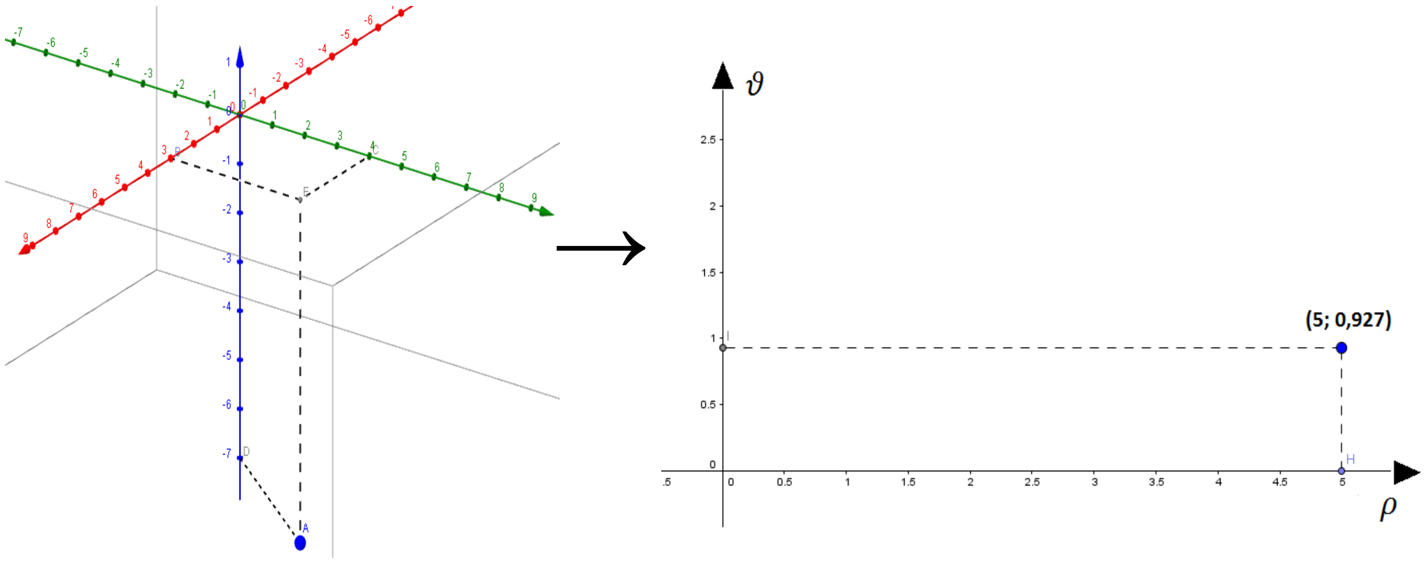
Si tomo (II) y la divido por (I) tenemos:

$$\frac{\rho\sin(\vartheta)}{\rho\sin(\vartheta)} = \frac{4}{3} \ \rightarrow \ \frac{\sin(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} = \frac{4}{3} \ \rightarrow \ \tan(\vartheta) = \frac{4}{3} \ \rightarrow \ \vartheta = tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \ \rightarrow \ \vartheta = 53.1301° = 0.927\ rad$$

Entonces

$$P = (3,4,-7) \ \rightarrow \ P' = (5;\ 0.927)$$

Gráficamente esto es:



Evaluamos P' en el vector producto fundamental para tener el vector normal

$$(\phi_\rho \text{ x } \phi_\vartheta)|_{P'} = \begin{bmatrix} 5(5.\sin(0.927) - \cos(0.927)) \\ 5(5.\cos(0.927) - \sin(0.927)) \\ 5 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 17 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{n} = \begin{bmatrix} 17 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Así teniendo un punto y un vector normal podemos construir la ecuación del plano tangente.

$$(x-3).17 + (y-4).11 + (z+7).(5) = 0$$
$$17x - 51 + 11y - 44 + 5z + 35 = 0$$
$$17x + 11y + 5z = 60$$

Respuesta:

$$17x + 11y + 5z = 60$$

Vea que aunque la parametrización no fue "la mejor" igual funcionó.

Cálculo de áreas

Ejercicio 1: *Calcular el área de la superficie de la esfera E_1 interior a la esfera E_2.*

$$E_1 : \{x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}, \qquad E_2 : \{x^2 + y^2 + z^2 = 2az\}, \qquad a > 0$$

Solución:

Aunque lo primero siempre es graficar la superficie a tratar, en esta oportunidad esa superficie depende de otras dos, y además una de ellas (E_2) no está dada de manera explícita para ser graficada, así que manipularemos esta superficie primero para luego hacer las gráficas.

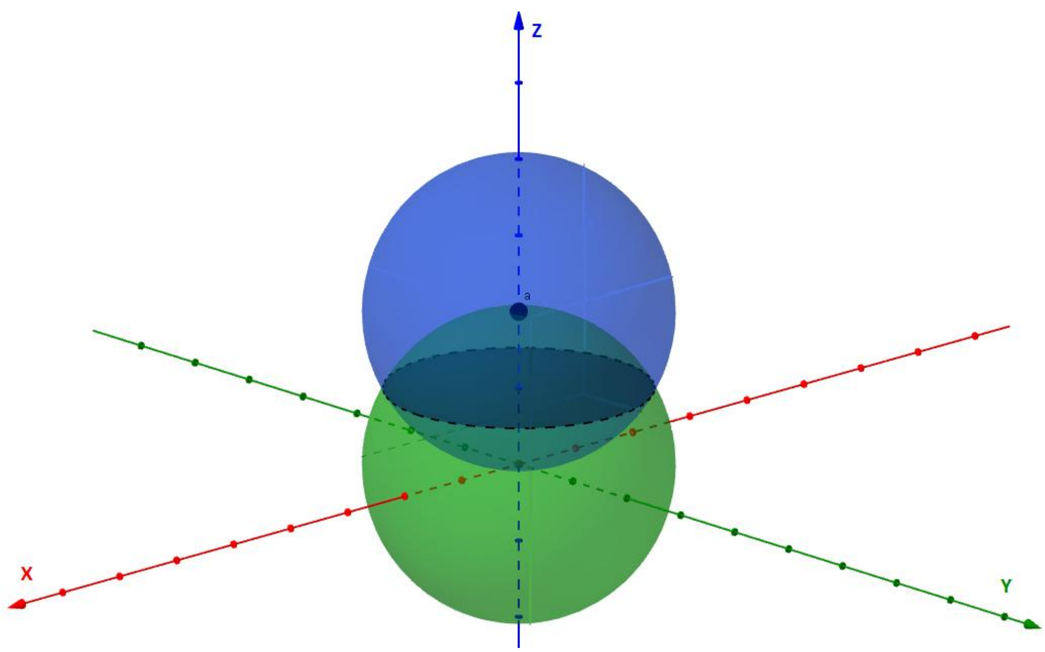
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2az \;\rightarrow\; x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0 \;\rightarrow\; x^2 + y^2 + z^2 - 2az + a^2 - a^2 = 0$$
$$\rightarrow\; x^2 + y^2 + (z^2 - 2az + a^2) - a^2 = 0 \;\rightarrow\; x^2 + y^2 + (z^2 - 2az + a^2) = a^2$$
$$\rightarrow\; x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$$

Analizamos las superficies que tenemos.

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$: Esfera de radio a centrada en el origen.

$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$: Esfera de radio a centrada en (0, 0, a)

Ahora graficamos.



La superficie a la que le queremos calcular el área es la especie de "casco" que está por encima del círculo opaco y debajo del punto (0, 0, a) y esta a su vez forma parte de la circunferencia E_1. Entonces lo que haremos será parametrizar E_1 y luego definir de donde a donde irán las variables (que son las variables de la parametrización) que me permitirán recorrer solo la parte que me interesa (o sea recorrer el casco).

En vista de que nos disponemos a parametrizar una esfera es conveniente hacerlo por coordenadas esféricas.

$$\phi = \begin{bmatrix} x = a\,cos(\vartheta)\,.\,cos(\varphi) \\ y = a\,sin(\vartheta)\,.\,cos(\varphi) \\ z = asin(\varphi) \end{bmatrix}, \qquad \phi_\vartheta = \begin{bmatrix} -a.\,sin(\vartheta)\,.\,cos(\varphi) \\ a.\,cos(\vartheta)\,.\,cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \phi_\varphi = \begin{bmatrix} -a.\,cos(\vartheta)\,.\,sin(\varphi) \\ -a.\,sin(\vartheta)\,.\,sin(\varphi) \\ a.\,cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$(\phi_\vartheta \text{ x } \phi_\varphi) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -sin(\vartheta) & cos(\vartheta) & 0 \\ -cos(\vartheta)\ .sin(\varphi) & -sin(\vartheta).sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{vmatrix} .a^2cos(\varphi) = \begin{bmatrix} cos(\vartheta).cos(\varphi) \\ cos(\varphi).sin(\vartheta) \\ sin(\varphi) \end{bmatrix} .a^2cos(\varphi)$$

Y ahora calculamos la parte que nos interesa para el cálculo de áreas, el módulo del vector producto fundamental.

$$|\phi_\vartheta\ x\ \phi_\varphi| = a^2cos(\varphi).\sqrt{cos^2(\vartheta).cos^2(\varphi) + cos^2(\varphi).sin^2(\vartheta) + sin^2(\varphi)} =$$
$$= a^2cos(\varphi).\sqrt{cos^2(\varphi).(cos^2(\vartheta) + sin^2(\vartheta)) + sin^2(\varphi)} = a^2cos(\varphi)$$

Si bien hemos hecho un montón de cálculos para llegar rápido al módulo del vector producto fundamental, no hemos tenido en cuenta que ϑ y φ son variables que describen una circunferencia y por lo tanto tienen un intervalo de valores para que esto sea posible, para recorrer toda la esfera esos valores son:

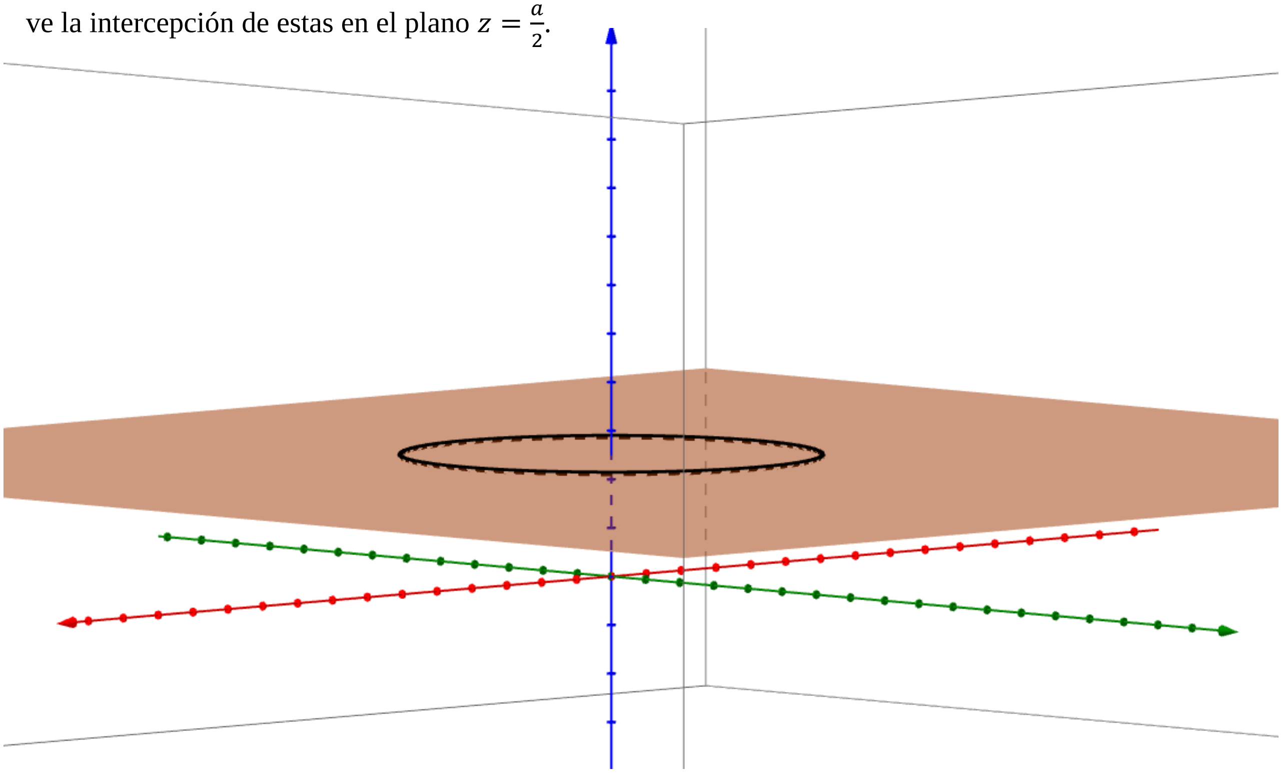
$$\vartheta \in [0,2\pi], \qquad \varphi \in [0,\pi]$$

Pero NO QUEREMOS RECORRER TODA LA ESFERA, solo la parte que está por encima del círculo opaco y bajo el punto a, para esto debemos definir unos nuevos intervalos para ϑ y φ, la pregunta es: ¿Cuáles son estos valores? Para responder eso debemos recordar que al no hacer parametrizaciones canónicas nos movemos (si vemos la figura en el espacio) por el borde o sobre la superficie y no sobre la "mancha" en el plano *xy* (nos moveríamos sobre esa "macha" en *xy* si la parametrización fuera canónica). En este caso particular debemos valernos de la geometría del problema y tener claro que significan ϑ y φ.

Primero vemos que E_1 y E_2 se interceptan en una curva circular (el borde del círculo opaco) que llamaremos *c*, a una altura z por ahora desconocida, lo que haremos ahora es descubrir cuál es esa altura, para eso hacemos $x = y = 0$ simultáneamente, de la siguiente manera

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2az \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 - z^2 \\ x^2 + y^2 = 2az - z^2 \end{cases} \rightarrow a^2 - z^2 = 2az - z^2 \rightarrow a^2 = 2az \rightarrow z = \frac{a}{2}$$

Lo que hicimos fue resolver un sistemas de ecuaciones para ver que valores de *z* compartes E_1 y E_2.
Si colocamos este valor de z en cualquiera de las dos expresiones algebraicas para las esferas tendremos como se ve la intercepción de estas en el plano $z = \frac{a}{2}$.

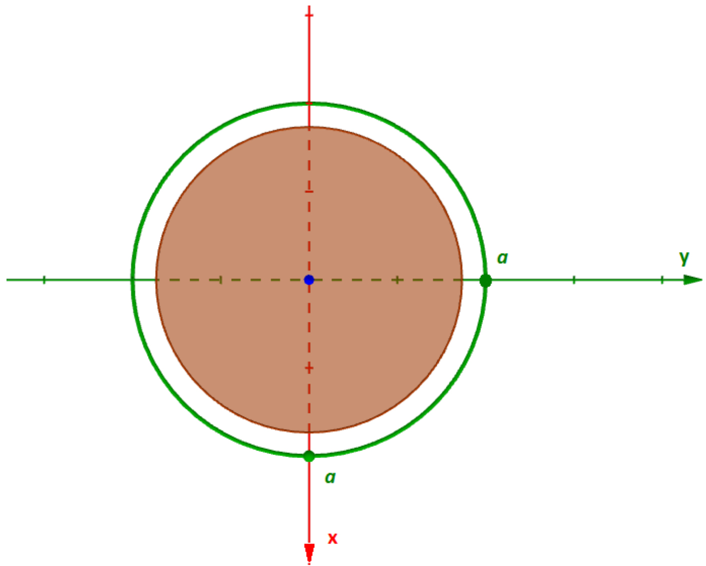


Alto! Primero un repaso. Lo que hicimos algebraicamente fue encontrar en que plano se interceptan las esferas, gráficamente es el plano de color marrón en la imagen de arriba, esa curva circular y negra es la curva *c* que sabemos que existe y que está ahí, más sin embargo no sabemos su radio, nos disponemos entonces a calcularlo, para esto (como dijimos arriba) tomamos el valor de $z = \frac{a}{2}$ que sabemos que satisface cualquiera de las esferas y lo sustituimos en una de ellas, esto inmediatamente arrojará el valor del radio de esa curva, en una expresión algebraica que dependerá de *x* y *y*.

Tomemos para nuestros fines E_1.

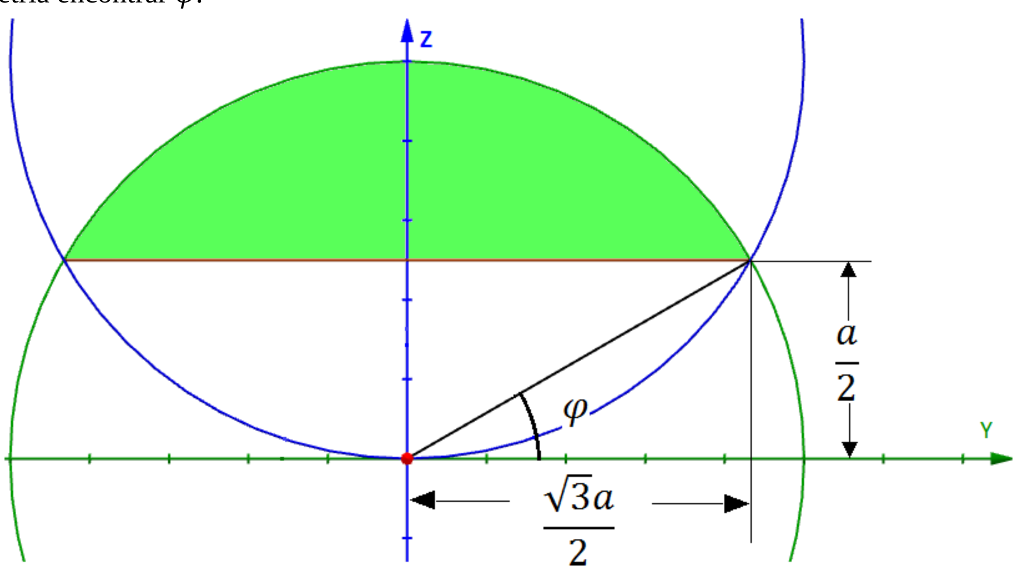
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, si\ z = \frac{a}{2} \ \rightarrow \ x^2 + y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \ \rightarrow x^2 + y^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \ \rightarrow x^2 + y^2 = \frac{3a^2}{4} \ \rightarrow$$
$$x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2$$

Gráficamente:



Lo que aquí tenemos son dos intercepciones vistas en dos planos. Primero el circulo de color marrón es el plano $z = \frac{a}{2}$ pasando por la curva *c* y la circunferencia verde se ve claramente que de radio *a* es la intercepción de E_1 con el plano $z = 0$, esto es observar esos dos cortes justo desde arriba del plano *xy*. Encontramos entonces el radio de la circunferencia que es la curva *c*, vale $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Todo esto lo hicimos para el siguiente dibujo, que es ver lo que ocurre en el plano $x = 0$, y así con con la siguiente geometría encontrar φ.



Ahora por trigonometría es fácil ver de donde a donde varía el ángulo φ, si recordamos que la parte coloreada de verde es el "casco" al cuál le queremos calcular el área.

$$\tan(\varphi) = \frac{a/2}{\sqrt{3}a/2} = \frac{2.a}{2.\sqrt{3}.a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \varphi = tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

Entonces

$$\vartheta \in [0,2\pi], \qquad \varphi \in \left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$$

Finalmente

$$A = \iint |\,\phi_\vartheta \text{ x } \phi_\varphi|\, d\varphi d\vartheta = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (a^2\cos(\varphi))d\varphi d\vartheta = a^2\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi)\, d\varphi d\vartheta = 2\pi a^2\left[1-\frac{1}{2}\right] = \pi a^2$$

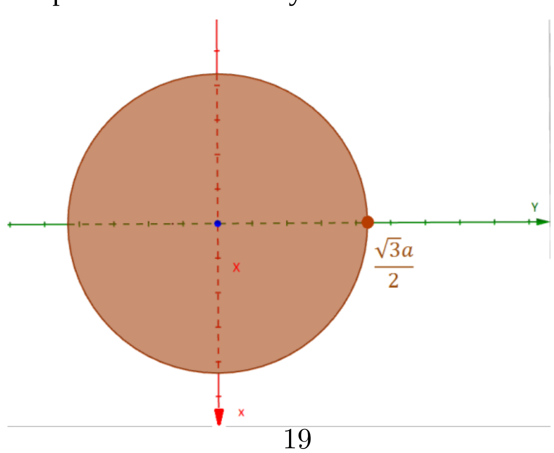
Antes de dar la respuesta por sentada demostremos que el resultado no depende de la parametrización, hagamos este ejercicio de nuevo usando la parametrización canónica.

$$\phi = \begin{bmatrix} x = x \\ y = y \\ z = \sqrt{a^2-x^2-y^2} \end{bmatrix}, \qquad \phi_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \end{bmatrix}, \qquad \phi_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \end{bmatrix}$$

$$(\,\phi_x \text{x}\, \phi_y) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \\ 0 & 1 & \dfrac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} x/\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ y/\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|\,\phi_x \text{x}\, \phi_y| = \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{x^2+y^2+a^2-x^2-y^2}{a^2-x^2-y^2}}$$
$$= \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

Para esta parametrización nos debemos mover sobre la "mancha" que deja en el plano xy el "casco", para esto el análisis de hallar el plano de intercepción de las esferas y el radio de la curva c es el mismo, recordemos que estos nos da $z = \frac{a}{2}$ y $\frac{\sqrt{3}a}{2}$



$$x \in \left[-\frac{\sqrt{3}a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right], \qquad y \in \left[-\sqrt{\frac{3a^2}{4} - x^2}, \sqrt{\frac{3a^2}{4} - x^2}\right]$$

Armando la integral del área

$$A = \iint \left| \phi_\vartheta \text{ x } \phi_\varphi \right| d\varphi d\vartheta = \int_{-\frac{\sqrt{3}a}{2}}^{\frac{\sqrt{3}a}{2}} \int_{-\sqrt{\frac{3a^2}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{3a^2}{4}-x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dydx$$

Cambiando a coordenadas polares y considerando la simetría del círculo

$$\begin{cases} x = \rho.cos\,(\vartheta) \\ y = \rho.sin\,(\vartheta)\,, \\ \quad Jb = \rho \end{cases} \qquad \begin{matrix} \vartheta \in [0, \pi/2] \\ \rho \in \left[0, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right] \end{matrix}$$

$$A = 4a \int_0^{\pi/2} \int_0^{\frac{\sqrt{3}a}{2}} \frac{\rho.d\rho d\vartheta}{\sqrt{a^2 - \rho^2 cos^2(\vartheta) - \rho^2 sin^2(\vartheta)}} = 4a \int_0^{\pi/2} \int_0^{\frac{\sqrt{3}a}{2}} \frac{\rho.d\rho d\vartheta}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}$$

$$\int \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho, \qquad \begin{matrix} a^2 - \rho^2 = t^2 \\ -2\rho.d\rho = 2t.dt \\ \rho.d\rho = -t.dt \end{matrix}, \qquad -\int \frac{t}{\sqrt{t^2}} dt = -\int dt = -t = -\sqrt{a^2 - \rho^2}$$

$$A = -4a \int_0^{\pi/2} \left[\sqrt{a^2 - \rho^2}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}a}{2}} d\vartheta = -4a \int_0^{\pi/2} \left[\sqrt{a^2 - \frac{3.a^2}{4}} - a\right] d\vartheta = -4a.\frac{\pi}{2}\left(a.\sqrt{1 - \frac{3}{4}} - a\right)$$

$$= -2\pi a^2.\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -2\pi a^2.\left(\frac{-1}{2}\right) = \pi a^2$$

Respuesta:

$$A = \pi a^2$$

Vea que *a* es una medida de que tan lejos o cerca estoy del cero en los ejes, eso significa que bien puede representar distancias (si se quiere metros) y las unidades de áreas son metros cuadrados, lo que coincide con nuestro resultado que es un área.

Repasemos nuestros pasos para llegar al resultado y generalicémoslos.

1. Manipulamos algebraicamente las expresiones que nos dieron hasta tener unas superficies que fueran fácilmente identificables.
2. Graficamos las superficies y observamos cual era el área que queríamos calcular.
3. Tomamos la parametrización más eficiente y calculamos el módulo del vector producto fundamental.
4. Identificamos el intervalo de integración para las dos variables de la parametrización.
5. Armamos la integral del área y la resolvimos.

Sin importar que parametrización usáramos los pasos y los resultados fueron los mismos.

Ejercicio 2: *Calcular el área de la superficie que resulta de interceptar las superficies S_1 y S_2 que está por encima del plano z = 2.*

$$S_1 : \left\{z = 5 - \sqrt{x^2 + y^2}\right\}, \qquad S_2 : \left\{z = 5 - \sqrt{x^2 + (y-3)^2}\right\}$$

Solución:

Identificamos las superficies en cuestión de manera que podamos entenderlas.

$$S_1 : \ z = 5 - \sqrt{x^2 + y^2} \ \rightarrow \ z - 5 = -\sqrt{x^2 + y^2} \ \rightarrow (-z + 5) = \sqrt{x^2 + y^2} \ \rightarrow \ (-z + 5)^2 = x^2 + y^2$$

$$S_2 : \ z = 5 - \sqrt{x^2 + (y-3)^2} \ \rightarrow \ z - 5 = -\sqrt{x^2 + (y-3)^2} \ \rightarrow (-z + 5) = \sqrt{x^2 + (y-3)^2} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ (-z + 5)^2 = x^2 + (y-3)^2$$

$(-z + 5)^2 = x^2 + y^2$: Cono que crece hacia *z < 0* y está centrado en *(0, 0, 5).*

$(-z + 5)^2 = x^2 + (y-3)^2$: Cono que crece hacia *z < 0* y está centrado en *(0, 3, 5).*

Hay dos planos de interés para entender la geometría del problema *z = 0* y *z = 2* interceptemos los conos con ambos planos y veamos que obtenemos.

$si \ z = 0$

$$S_1 : \quad (-z + 5)^2 = x^2 + y^2 \ \rightarrow \ (0 + 5)^2 = x^2 + y^2 \ \rightarrow \ (5)^2 = x^2 + y^2$$

$$S_2 : \ (-z + 5)^2 = x^2 + (y-3)^2 \ \rightarrow \ (0 + 5)^2 = x^2 + (y-3)^2 \ \rightarrow \ (5)^2 = \ x^2 + (y-3)^2$$

$si \ z = 2$

$$S_1 : \quad (-z + 5)^2 = x^2 + y^2 \ \rightarrow \ (-2 + 5)^2 = x^2 + y^2 \ \rightarrow \ (3)^2 = x^2 + y^2$$

$$S_2 : \ (-z + 5)^2 = x^2 + (y-3)^2 \ \rightarrow \ (-2 + 5)^2 = x^2 + (y-3)^2 \ \rightarrow \ (3)^2 = \ x^2 + (y-3)^2$$

$x^2 + y^2 = (5)^2$: Circunferencia de radio 5 centrada en el origen.

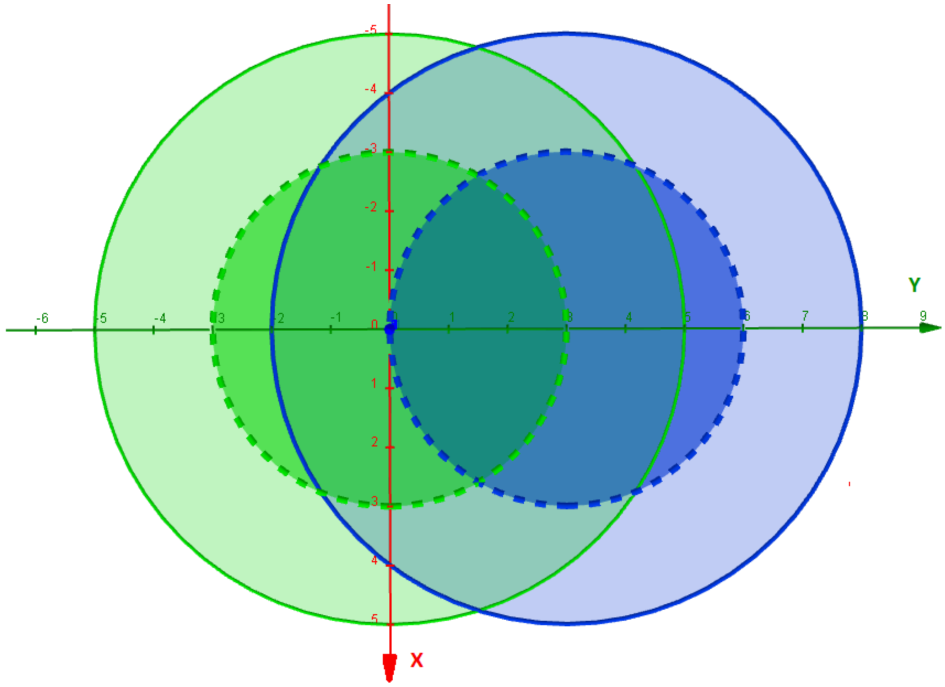
$x^2 + (y-3)^2 = \ (5)^2$: Circunferencia de radio 5 centrada en *(0, 3, 0).*

$x^2 + y^2 = (3)^2$: Circunferencia de radio 3 centrada en *(0, 0, 2).*

$x^2 + (y-3)^2 = \ (3)^2$: Circunferencia de radio 3 centrada en *(0, 3, 2).*

Veamos gráficamente como se verían estas intercepciones viendo a las superficies “desde arriba” (ver la siguiente imagen).

En ella las círculos de borde continuo representan la intercepción de los conos con el plano *z = 0* y los círculos con borde seccionado representan la intercepción de los conos con el plano *z = 2*, verde para S_1 y azul para S_2. La zona de interés está en donde se superponen los círculos de borde seccionado, esa es la intercepción de los dos conos vista desde arriba y cuando se realice la parametrización pertinente al caso si ésta se eligiera canónica entonces la zona de integración será esa zona de superposición.



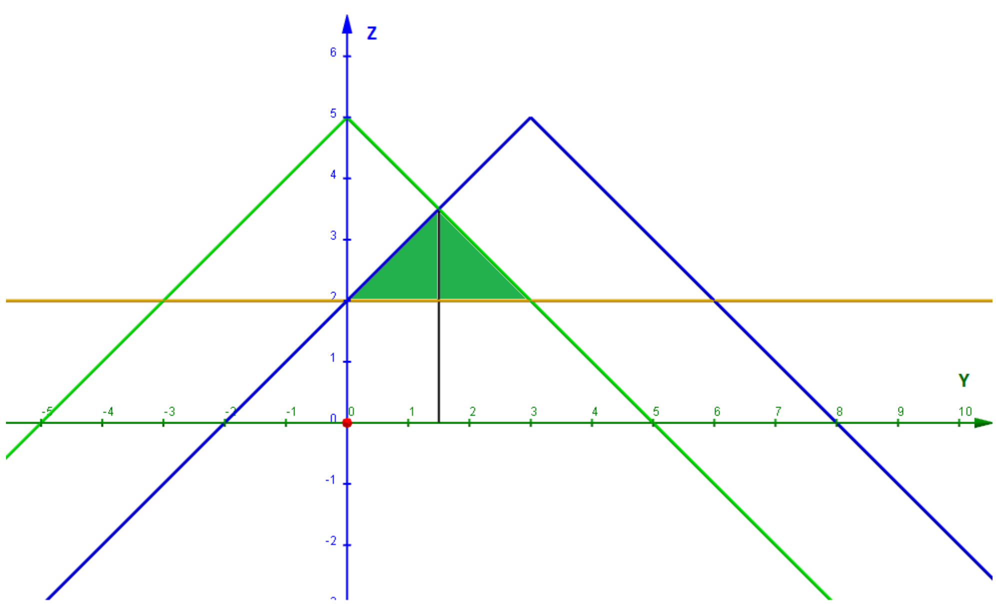
Si con este trabajo todavía no se está conforme para reconocer la figura a la que se le calculará el área, es recomendable hacer otra inspección de como lucen estos objetos (que están en 3D) en otro plano, en el caso de la imagen de arriba lo que hicimos fue superponer dos planos (que agraciadamente eran paralelos) para estudiar la figura, si se quisiera estudiar ésta intercepción viendo el plano *x = 0* se hace lo siguente.

$x = 0$

$$S_1 : \quad (-z+5)^2 = x^2 + y^2 \;\rightarrow\; (-z+5)^2 = 0 + y^2 \;\rightarrow\; (-z+5)^2 = y^2 \;\rightarrow\; -z+5 = \pm y \;\rightarrow \begin{cases} z = 5 - y \\ z = 5 + y \end{cases}$$

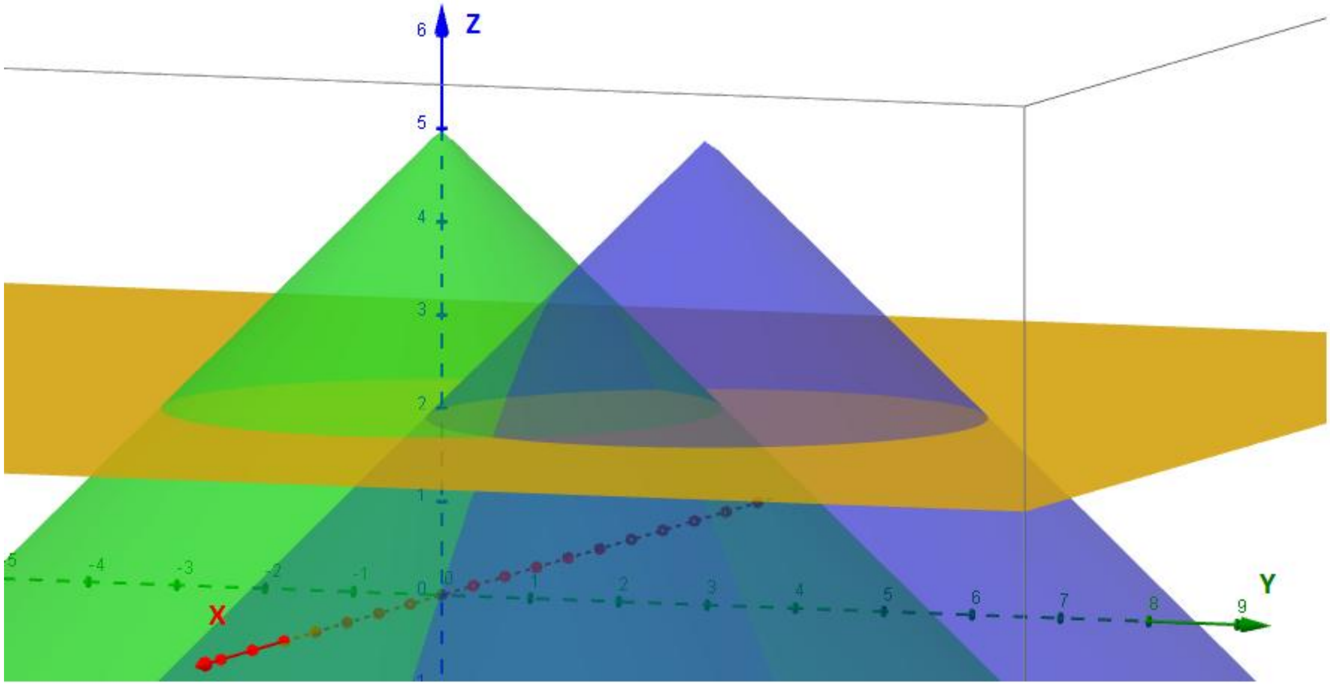
$$S_2 : \; (-z+5)^2 = x^2 + (y-3)^2 \;\rightarrow\; (-z+5)^2 = 0 + (y-3)^2 \;\rightarrow\; (-z+5)^2 = (y-3)^2 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; -z+5 = \pm(y-3) \;\rightarrow\; \begin{cases} z = y + 2 \\ z = 8 - y \end{cases}$$

Graficando las rectas obtenidas (además de *z =2*) y recordando que los conos existen solo para *z < 5*, podemos hacer la siguiente gráfica.



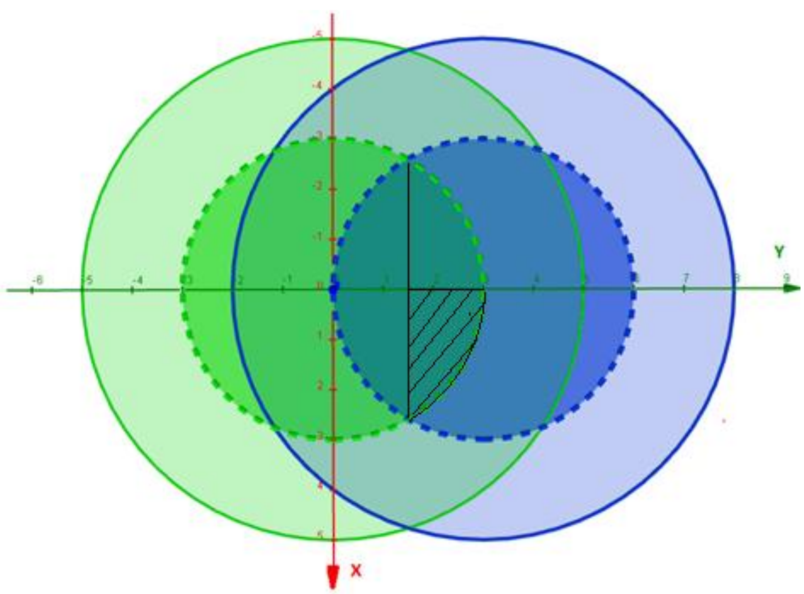
La zona sombreada de verde representa el espacio interno (en *x=0*) de la superficie a la que se le quiere calcular su área.

Si se tiene habilidad para dibujar es posible llegar a una buena representación en 3D de la superficie.



La superficie es la que está por encima del plano amarillo (z = 2) en donde se interceptan los dos conos, es una especia de "canoa invertida".

Dada la poca similitud con esferas y conos nos disponemos a elegir la parametrización canónica, véase que existe simetría entre los lados de la "canoa invertida" por lo que podemos calcular el área de un lado de ella y luego multiplicar por dos, más aun veamos la siguiente imagen que es un caso particular de la primera imagen presentada.



Esta imagen lo que nos dice es que solo tenemos q movernos por la región rayada para calcular un cuarto del área total y este cuarto le pertenece a S_1, por lo tanto parametrizamos ese cono.

$$\phi = \begin{bmatrix} x = x \\ y = y \\ z = 5 - \sqrt{x^2 + y^2} \end{bmatrix}, \qquad \phi_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{bmatrix}, \qquad \phi_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{bmatrix}$$

$$(\phi_x \text{x} \, \phi_y) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 & 1 & \dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x/\sqrt{x^2+y^2} \\ y/\sqrt{x^2+y^2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\phi_x \text{x} \, \phi_y| = \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}$$

Ahora veamos los valores para *x* y *y* observando la gráfica, *x* varía desde cero hasta el punto donde se cortan las circunferencias de bordes seccionados y *y* varía desde 3/2 hasta $x^2 + y^2 = (3)^2$, encontremos el punto donde se interceptan las circunferencia de bordes punteados.

Sabemos que a este punto le corresponde el valor de *y = 3/2*, entonces en cualquiera de las dos circunferencias de radio 3 sustituimos este valor y despejamos *x*.

$$x^2 + y^2 = (3)^2, \qquad si\ y = \frac{3}{2} \ \rightarrow \ x^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9 \ \rightarrow \ x^2 = 9.\left(\frac{3}{4}\right) \ \rightarrow \ x = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2},$$
$$nos\ quedamos\ con\ x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Entonces,

$$x \in \left[0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right], \qquad y \in \left[\frac{3}{2}, \sqrt{9 - x^2}\right]$$

Armando la integral

$$A = 4\sqrt{2} \int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy dx$$

Procedemos a resolverla

$$\frac{A}{4\sqrt{2}} = \int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \left[\sqrt{9 - x^2} - \frac{3}{2}\right] dx \ \rightarrow \ \int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \left[\sqrt{9 - x^2} - \frac{3}{2}\right] dx \ \rightarrow \ \int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \sqrt{9 - x^2}\, dx - \frac{3}{2}\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} dx$$

Es necesario saber que

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = 3\int \sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}\,dx, \qquad \begin{matrix} x/3 = \sin(t) \\ dx = 3\cos(t)\,dt \end{matrix} \to 9\int \sqrt{1-sin^2(t)}.\cos(t)\,dt = 9\int cos^2(t)dt\,,$$

$$\begin{matrix} \cos(2t) = cos^2(t) - sin^2(t) \\ \cos(2t) = 2cos^2(t) - 1 \\ cos^2(t) = \frac{1}{2}.(\cos(2t)+1) \end{matrix} \quad \to \quad \frac{9}{2}\int (\cos(2t)+1)dt =$$

$$= \frac{9}{2}\int \cos(2t)\,dt + \frac{9}{2}\int dt \; = \frac{9}{2}\int \cos(2t)\,dt + \frac{9t}{2}, \qquad \begin{matrix} 2t = h \\ dt = \frac{dh}{2} \end{matrix}$$

$$\to \; \frac{9}{4}\int \cos(h)\,dh + \frac{9t}{2} \;\to\; \frac{9}{4}.\sin(h) + \frac{9t}{2} \;\to\; \frac{9}{4}.\sin(2t) + \frac{9t}{2}, \qquad \begin{matrix} x/3 = \sin(t) \\ t = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right), \end{matrix}$$

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t) \;\to\; \frac{9}{2}.\sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right).\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right) + \frac{9}{2}.sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) =$$

$$= \frac{9}{2}.\sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right).\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right) + \frac{9}{2}.sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) =$$

$$= \; \frac{3x}{2}.\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right) + \frac{9}{2}.sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right),$$

$$cos^2(t) = \sqrt{1-sin^2(t)} \;\to \frac{3x}{2}.\sqrt{1 - sin\left(sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right).\sin\,(sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right))} + \frac{9}{2}.sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) =$$

$$= \frac{3x}{2}.\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2} + \frac{9}{2}.sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) = \; \frac{x}{2}.\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2}.sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right).$$

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \; \frac{x}{2}.\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2}.sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$$

Entonces,

$$\frac{A}{4\sqrt{2}} = \left[\frac{x}{2}.\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2}.sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{3x}{2}\right]_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \; \frac{3\sqrt{3}}{4}.\sqrt{9-\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{9}{2}.sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{3}{2}.\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$= \; \frac{3\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{8} \;\;\to\;\; A = \; \frac{3\sqrt{2}}{2}.\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$$

Respuesta:

$$A = \frac{3\sqrt{2}}{2}.\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$$

Este ejercicio tiene una dificultad un tanto elevada ya que busca desarrollar la habilidad de interpretar superficies en tres dimensiones que es donde más se hizo énfasis, los restantes ejercicios de la guía que involucran superficies requieren este tipo de análisis y me atrevería a decir como autor que este es tal vez (por poco) el más difícil.

Ejercicio 3: *Calcular el área externa del sólido limitado por S_1, S_2 y S_3.*

$$S_1 : \{x^2 + y^2 = 1\}, \qquad S_2 : \{x^2 + y^2 + z^2 = 4\}, \qquad S_3 : \{x^2 + y^2 + (z-6)^2 = 9\}$$

Solución:

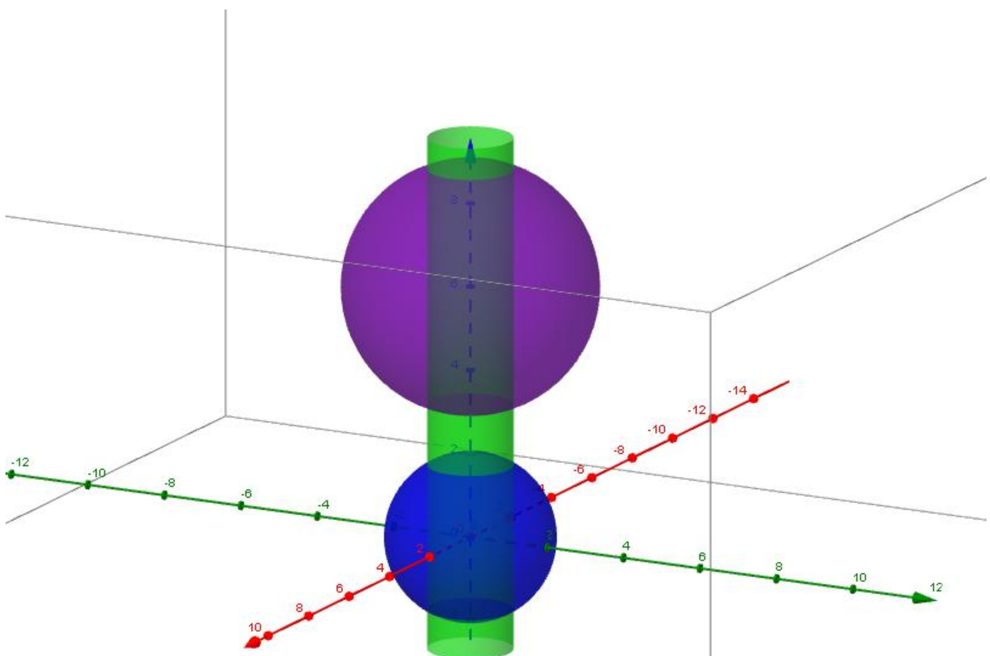
Identificamos las superficies

$x^2 + y^2 = 1$: Cilindro de radio 1 y centrado en el origen, tiene como eje central el eje *z*.

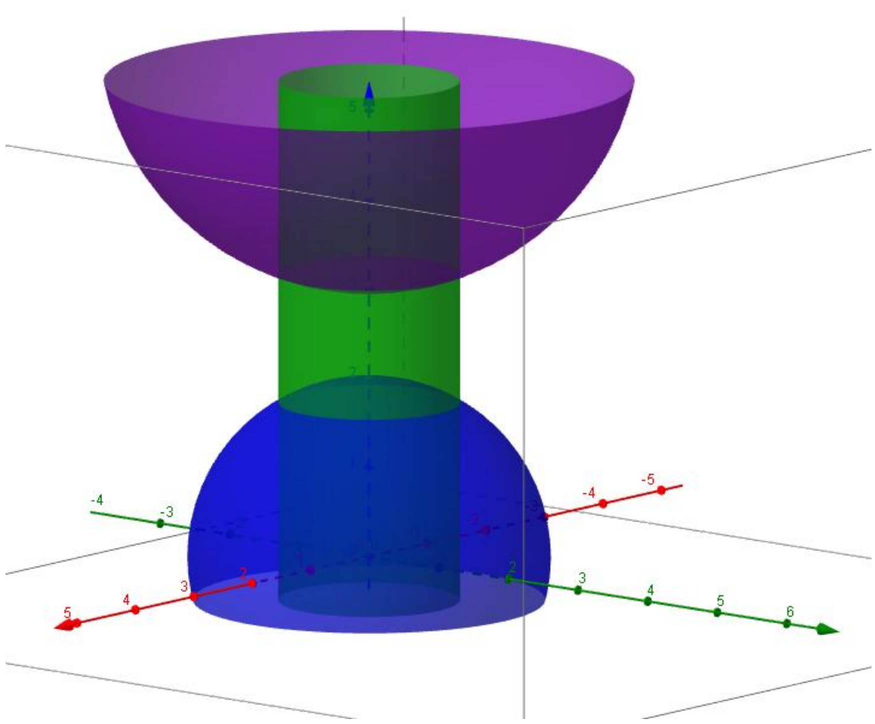
$x^2 + y^2 + z^2 = 4$: Esfera de radio 2 centrada en el origen.

$x^2 + y^2 + (z-6)^2 = 9$: Esfera de radio 3 centrada en *(0, 0, 6)*.

Graficamos las superficies.



La parte que nos interesa es la siguiente



Las intercepciones de las esferas con el cilindro son en total 4, pero si tomamos en cuenta solo la zona que nos interesa, que es la zona del cilindro entre las esferas que tiene como tapas las regiones de las esferas internas en él, entonces nos quedamos con solo dos planos de intercepción, procedemos a calcularlos.

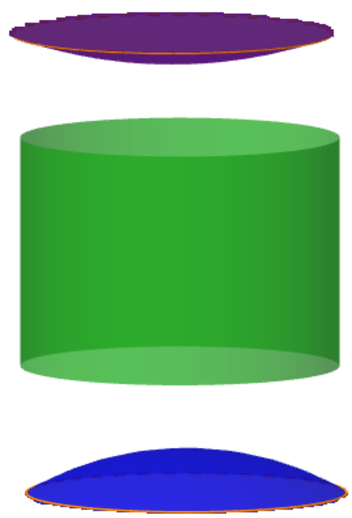
$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases} \rightarrow\ z=\pm\sqrt{3}, \qquad \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2+(z-6)^2=9 \end{cases} \rightarrow\ z=2\left(3\pm\sqrt{2}\right)$$

Nos quedamos con los valores

$$z=\sqrt{3}, \qquad z=2\left(3-\sqrt{2}\right)$$

Se toma el valor de $2\left(3-\sqrt{2}\right)$ dado que $2\left(3+\sqrt{2}\right)$ es "más positivo" y colocaría el plano en la intercepción superior de la esfera S_3.

A partir de ahora se consideran entonces las tres siguiente superficies para trabajar.



Enfoquémonos primero en la que parece más fácil, esa es *A2*.

Matemáticamente es posible parametrizar el cilindro y hacer la integral del área considerando como variables ϑ y *z*. Pero desde un punto de vista de la ingeniería es importante optimizar tiempo y esfuerzo para conseguir los resultados, *A2* simplemente debe pensarse como el área de un cilindro común que está entre dos planos conocidos, se usa la fórmula:

$$A_{cilindro}=2\pi rh$$

r: radio del cilindro, *h*: altura del cilindro

$$A_{cilindro}=2\pi .1.\left(2\left(3-\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}\right)$$

$$A2=2\pi\left(6-2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$$

Se deja como ejercicio demostrar que este sería el mismo resultado de tomar la parametrización cilíndrica para calcular el área.

Como *A1* y *A3* tendrían la misma región de integración si se tomara la parametrización canónica para ellas, entonces tomaremos esa parametrización, empecemos parametrizando *A3*.

$$\phi = \begin{bmatrix} x = x \\ y = y \\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \end{bmatrix}, \qquad \phi_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \end{bmatrix}, \qquad \phi_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \end{bmatrix}$$

$$\left(\phi_x \mathrm{x}\, \phi_y \right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \\ 0 & 1 & \dfrac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x/\sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ y/\sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left| \phi_x \mathrm{x}\, \phi_y \right| = \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + 4 - x^2 - y^2}{4 - x^2 - y^2}} = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

Teniendo en cuenta que la región de integración es el área encerrada en el plano *xy* por el cilindro de radio uno.

$$x \in [-1,1], \qquad y \in \left[-\sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - x^2} \right]$$

Armando la integral del área

$$A3 = \iint \left| \phi_\vartheta \mathrm{\ x\ } \phi_\varphi \right| d\varphi d\vartheta = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \, dydx$$

Cambiando a coordenadas polares y considerando la simetría del círculo

$$\begin{cases} x = \rho.\cos(\vartheta) \\ y = \rho.\sin(\vartheta), \\ Jb = \rho \end{cases} \qquad \begin{matrix} \vartheta \in [0,2\pi] \\ \rho \in [0,1] \end{matrix}$$

$$A3 = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\rho.d\rho d\vartheta}{\sqrt{4 - \rho^2 cos^2(\vartheta) - \rho^2 sin^2(\vartheta)}} = 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{\rho.d\rho d\vartheta}{\sqrt{4 - \rho^2}}$$

$$\int \frac{\rho}{\sqrt{4 - \rho^2}} d\rho, \qquad \begin{matrix} 4 - \rho^2 = t^2 \\ -2\rho.d\rho = 2t.dt \;, \\ \rho.d\rho = -t.dt \end{matrix} \qquad -\int \frac{t}{\sqrt{t^2}} dt = -\int dt = -t = -\sqrt{4 - \rho^2}$$

$$A3 = -8 \int_0^{\pi/2} \left[\sqrt{4 - \rho^2} \right]_0^1 d\vartheta = -8 \int_0^{\pi/2} \left[\sqrt{4 - 1} - \sqrt{4} \right] d\vartheta = -8.\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{3} - 2 \right) = 4\pi\left(2 - \sqrt{3} \right)$$

$$A3 = 4\pi\left(2 - \sqrt{3} \right)$$

Terminemos con *A1*.

$$\phi = \begin{bmatrix} x = x \\ y = y \\ z = 6 - \sqrt{9 - x^2 - y^2} \end{bmatrix}, \qquad \phi_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \end{bmatrix}, \qquad \phi_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \end{bmatrix}$$

$$(\phi_x \mathrm{x}\, \phi_y) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}} \\ 0 & 1 & \dfrac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -x/\sqrt{9-x^2-y^2} \\ -y/\sqrt{9-x^2-y^2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\,\phi_x \mathrm{x}\, \phi_y| = \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{x^2+y^2+9-x^2-y^2}{9-x^2-y^2}} = \frac{3}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

Teniendo en cuenta que la región de integración es el área encerrada en el plano *xy* por el cilindro de radio uno.

$$x \in [-1,1], \qquad y \in \left[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\right]$$

Armando la integral del área

$$A1 = \iint |\,\phi_\vartheta \mathrm{\ x\ } \phi_\varphi|\, d\varphi d\vartheta = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{3}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\, dydx$$

Cambiando a coordenadas polares y considerando la simetría del círculo

$$\begin{cases} x = \rho.\cos(\vartheta) \\ y = \rho.\sin(\vartheta), \\ Jb = \rho \end{cases} \qquad \begin{matrix} \vartheta \in [0,2\pi] \\ \rho \in [0,1] \end{matrix}$$

$$A1 = 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\rho.d\rho d\vartheta}{\sqrt{9-\rho^2 cos^2(\vartheta) - \rho^2 sin^2(\vartheta)}} = 12\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \frac{\rho.d\rho d\vartheta}{\sqrt{9-\rho^2}}$$

$$\int \frac{\rho}{\sqrt{9-\rho^2}} d\rho, \qquad \begin{matrix} 9-\rho^2 = t^2 \\ -2\rho.d\rho = 2t.dt \\ \rho.d\rho = -t.dt \end{matrix}, \qquad -\int \frac{t}{\sqrt{t^2}} dt = -\int dt = -t = -\sqrt{9-\rho^2}$$

$$A1 = -12\int_0^{\pi/2} \left[\sqrt{9-\rho^2}\right]_0^1 d\vartheta = -12\int_0^{\pi/2} \left[\sqrt{9-1} - \sqrt{9}\right] d\vartheta = -12.\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{8}-3\right) = 6\pi\left(3-2\sqrt{2}\right)$$

$$A1 = 6\pi\left(3-2\sqrt{2}\right)$$

Sumando los tres resultados

$$A = A1 + A2 + A3 = 6\pi\left(3-2\sqrt{2}\right) + 2\pi\left(6-2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right) + 4\pi\left(2-\sqrt{3}\right)$$

Respuesta:

$$A = 2\pi\left(19 - 8\sqrt{2} - 3\sqrt{3}\right)$$

Ejercicio 4: *Calcular el área externa del sólido que resulta de la intercepción de S_1, S_2 y S_3.*

$$S_1 : \{x^2 + y^2 = a^2\}, \qquad S_2 : \{z + y = 2a\}, \qquad S_3 : \{z = 0\}$$

Solución:

Identificamos las superficies

$x^2 + y^2 = a^2$: Cilindro de radio a y centrado en el origen, tiene como eje central el eje *z*.

$z + y = 2a$: Plano paralelo al eje x con vector normal a *(0, 1, 1)*.

$z = 0$: Plano *xy*.

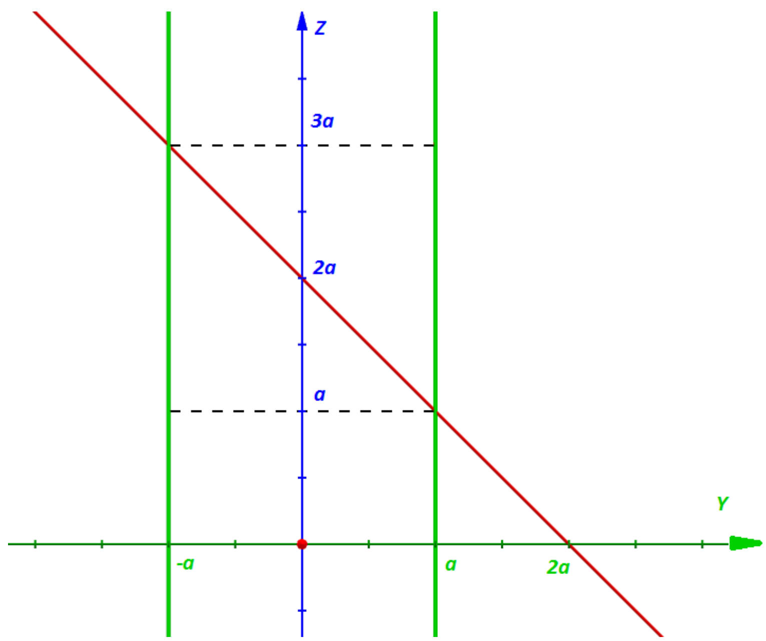
Se podría hacer la gráfica en 3D del cilindro con el plano pero esta puede ser laboriosa y no aportar a primera vista toda la información necesaria para el trabajo, en vez de veamos lo que pasa en el plano *x=0*.

$x = 0$

$$x^2 + y^2 = a^2 \;\rightarrow\; 0 + y^2 = a^2 \;\rightarrow\; y = \pm a$$

$$z = 2a - y$$

Con esta información que ya debería ser fácilmente identificable podemos hacer la siguiente gráfica



Tengamos en cuenta que son 4 superficies a las que les debemos calcular el área:

A1: Sección del cilindro para *0 < z < a*.

A2: Sección del cilindro para *a < z <3a*.

A3: S_2 limitado por el cilindro.

A4: S_3 limitado por el cilindro.

$$A1 = 2\pi r h = 2\pi . a . (a) \;\rightarrow\; A1 = 2\pi a^2$$

$$A2 = \frac{2\pi . a . (3a - a)}{2} = 2\pi a^2$$

Para *A3* si debemos parametrizar el plano (para los planos siempre es recomendable usar la parametrización canónica).

$$\phi = \begin{bmatrix} x = x \\ y = y \\ z = 2a - y \end{bmatrix}, \qquad \phi_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \phi_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\phi_x \mathrm{x}\, \phi_y \right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left| \phi_x \mathrm{x}\, \phi_y \right| = \sqrt{2}$$

Vea que este cálculo, incluyendo la parametrización eran innecesarios se sabe de ante mano cual es el vector siempre normal al plano, *(0, 1, 1)*, bastaba tomar este vector y calcularle su módulo.

Y para la región de integración:

$$x \in [-a, a], \qquad y \in \left[-\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{a^2 - x^2}\right]$$

Armando la integral

$$A3 = \iint \left| \phi_\vartheta \mathrm{\ x\ } \phi_\varphi \right| d\varphi d\vartheta = \sqrt{2} \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 1.\, dydx$$

Cambiando a coordenadas polares y considerando la simetría del círculo

$$\begin{cases} x = \rho . \cos(\vartheta) \\ y = \rho . \sin(\vartheta), \\ Jb = \rho \end{cases} \qquad \begin{matrix} \vartheta \in [0, 2\pi] \\ \rho \in [0,1] \end{matrix}$$

$$A3 = \sqrt{2} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{a} \rho .\, d\rho d\vartheta = \sqrt{2}.\, 2\pi . \frac{a^2}{2} = \sqrt{2}. \pi . a^2$$

Por último el área de un círculo de radio *a*

$$A4 = \pi . a^2$$

Respuesta:

$$A = A1 + A2 + A3 + A4 = 2\pi a^2 + 2\pi a^2 + \sqrt{2}. \pi . a^2 + \pi . a^2$$

$$A = \pi a^2 \left(\sqrt{2} + 5\right)$$

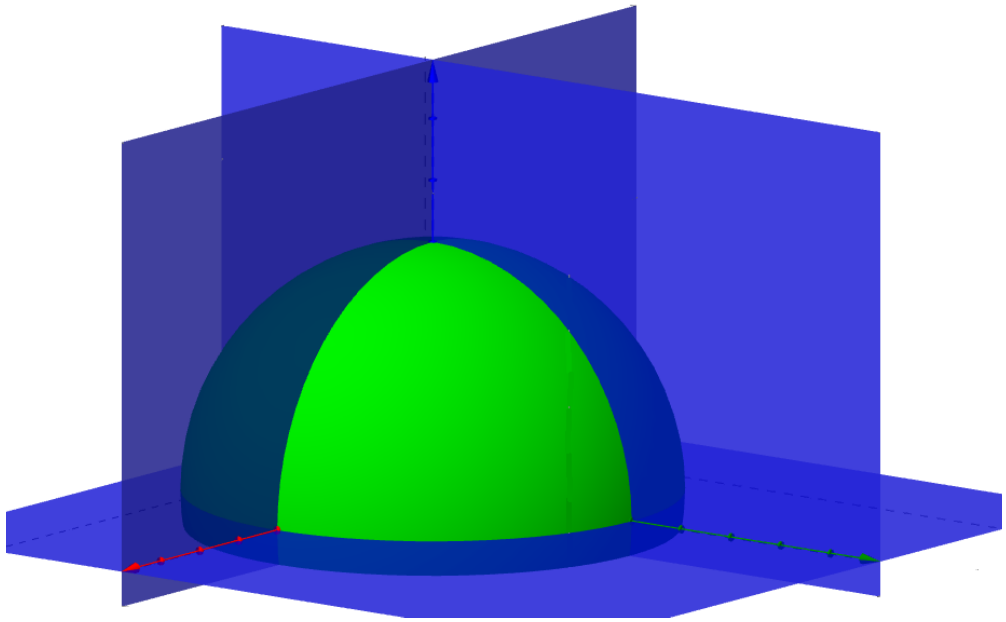
Tal vez el área más difícil de ver sea *A2*, esta no es más que tomar un cilindro completo y cortarlo por una mitad exacta, de hecho vea que da lo mismo que *A1*.

Integrales sobre campos vectoriales.

Ejercicio 1: *Calcular el flujo del campo F(r) a través de la esfera E en el primer octante, con vector normal de componente z positiva.*

$$F(r) = (yz, xz, xy), \qquad E: x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Solución:



Identificamos la esfera y la graficamos.

Procedemos a parametrizarla con coordenadas esféricas usuales.

$$\phi = \begin{bmatrix} x = r\,sen(u)\,.\,cos(v) \\ y = r\,sen(u)\,.\,sen(v) \\ z = rcos(u) \end{bmatrix}, \qquad \phi_u = r.\begin{bmatrix} cos(u)cos(v) \\ cos(u)sen(v) \\ -sen\,(u) \end{bmatrix}, \qquad \phi_v = r.\begin{bmatrix} -sen(u)sen(v) \\ sen(u)\,cos(v) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\phi_u\, x\, \phi_v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ cos(u)\,cos\,(v) & cos(u)\,sen(v) & -sen\,(u) \\ -\,sen(u)\,sen\,(v) & sen(u)\,cos\,(v) & 0 \end{vmatrix}.r^2 = \begin{bmatrix} sen(u)\,cos\,(v) \\ sen(u)sen(v) \\ cos(u) \end{bmatrix}.r^2 sen\,(u)$$

Como queremos recorrer solo la parte de la circunferencia que está en el primer octante

$$u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Ahora tomamos el campo vectorial y lo componemos con la parametrización

$$(F \circ \phi) = r^2.\begin{bmatrix} sen(u)\,sen(v)cos\,(u) \\ sen(u)\,cos(v)\,cos\,(u) \\ sen^2(u)\,cos(v)\,sen(v) \end{bmatrix} = r^2.sen(u).\begin{bmatrix} sen(v)cos\,(u) \\ cos(v)\,cos\,(u) \\ sen(u)\,cos(v)\,sen(v) \end{bmatrix}$$

Recordando que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (F \circ \phi).(\phi_u\, x\, \phi_v)dudv$$

Procedemos a hacer el producto punto primero para luego colocar el resultado en la integral

$$(F \circ \phi).\left(\phi_u \; x \; \phi_v\right) = r^4.sen^2(u).\begin{bmatrix} sen(v)\cos(u) \\ cos(v)\cos(u) \\ sen(u)\,cos(v)\,sen(v) \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} sen(u)\cos(v) \\ sen(u)sen(v) \\ cos(u) \end{bmatrix}$$

$$= \; r^4.sen^2(u).(sen(v)\cos(u)\,sen(u)\,co\,s(v) +$$

$$+ cos(v)\cos(u)sen(u)sen(v) + sen(u)\,cos(v)\,sen(v)\,cos(u)) =$$

$$= \; r^4.sen^2(u).(3.sen(u)\,cos(u)sen(v)\,cos(v)) =$$

$$= \; 3.r^4.sen^2(u).\left(\frac{2}{2}sen(u)\,cos(u).\frac{2}{2}sen(v)\,cos(v)\right) =$$

$$= \frac{3}{4}.r^4.sen^2(u).(2.sen(u)\,cos(u)).(2.sen(v)\,cos(v)) =$$

$$= \frac{3}{4}.r^4.sen^2(u).sen(2u).\mathrm{sen}\,(2v)$$

Armando la integral

$$\Pi = \frac{3r^4}{4}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(u).sen(2u).sen\,(2v)\;dudv = \frac{3r^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(u).sen(2u)du.\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,(2v)\,dv$$

$$\int sen(2v)\,dv = \frac{-cos\,(2v)}{2}$$

$$\int sen^2(u).sen(2u)du = 2\int sen^3(u).cos(u)\,du, \qquad \begin{matrix} sen(u) = t \\ cos(u)\,du = dt \end{matrix} \;\rightarrow\; 2\int t^3 dt = \frac{t^4}{2} = \frac{sen^4(u)}{2}$$

$$\Pi = \frac{3r^4}{4}.\left[\frac{sen^4(u)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}.\left[\frac{-cos\,(2v)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3r^4}{4}.\left[\frac{1}{2}\right].[1] = \frac{3r^4}{8}$$

Respuesta:

$$\Pi = \frac{3r^4}{8}$$

Ejercicio 2: *Sea F un campo vectorial hallar el flujo de F a través de la superficie S que es frontera del conjunto* Ω.

$$F(r) = (3x^2, 5y^2, 6z), \qquad \Omega = \left\{(x,y,z) \in R^3 \;:\; 3z \le \sqrt{x^2+y^2}, \qquad 18z \ge x^2+y^2\right\}$$

Donde S está orientada con la normal que apunta hacia el interior de Ω.

Solución:

Para entender que son estas superficies que nos dieron es bueno hacer el análisis por planos que hemos venido practicando. Primero tengamos presente a que se parecen las superficies que nos dieron.

$3z \le \sqrt{x^2+y^2} \to (3z)^2 \le x^2+y^2 \to (z)^2 \le \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2, z > 0$ tiene similitud con los conos ya estudiados

$18z \ge x^2+y^2 \to z \ge \frac{x^2+y^2}{18}$ Parece ser un paraboloide

Lo que puede causar confusión son los valores de 3 (para el extraño cono) y 18 (para el extraño paraboloide) además de los signos de desigualdades.

Para los números 3 y 18, estos no son más que alteraciones en la estructura del cono ordinario y el paraboloide ordinario respectivamente, lo que hacen estos valores es hacer que el cono o el paraboloide crezcan más rápido o más lento, si el término divide a la expresión x^2+y^2 (de cualquiera de las dos formas, sea como se escribió para el cono o para el paraboloide) lo que hace es que este crezca más lento, si estuviera multiplicando creciera más rápido.

Las desigualdades lo que se refieren es a zonas del espacio que están limitadas por estas figuras algo así como: estoy en la zona por arriba del cono o estoy por debajo del paraboloide, por dar algunos ejemplos.

Estos análisis pueden ser comprobados tomando

$x = 0$

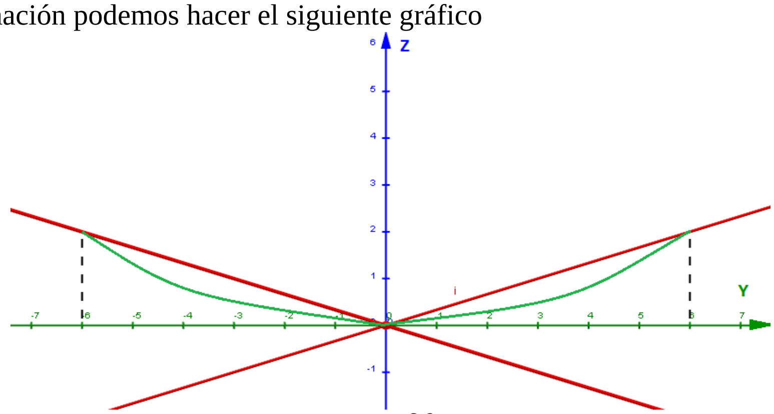
$$3z \le \sqrt{y^2} \;\to\; z \le \pm\frac{y}{3}$$

$$18z \ge y^2 \;\to\; z \ge \frac{y^2}{18}$$

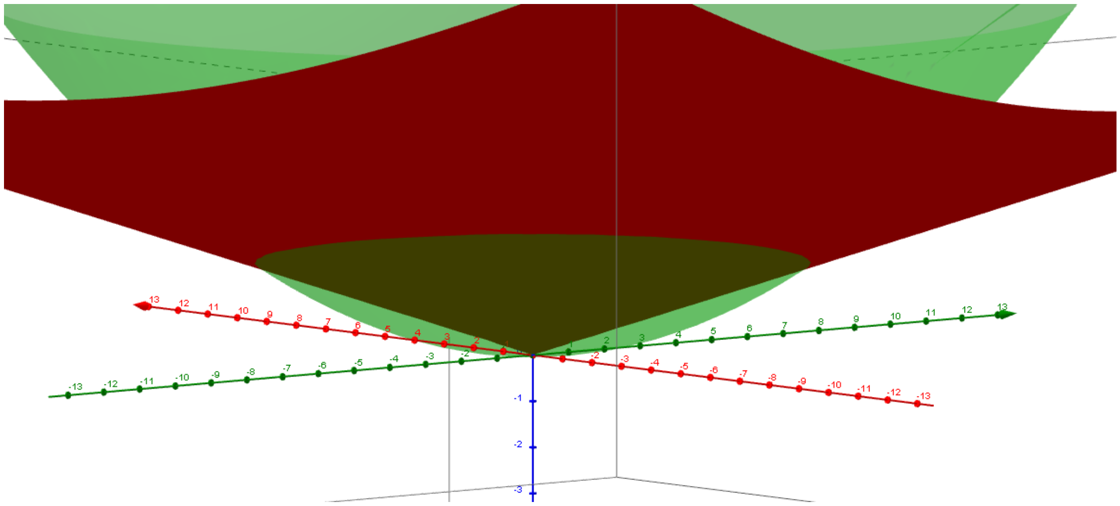
Identificamos así dos rectas y una parábola que viven en *yz* sería conveniente saber donde se interceptan

$$z = \frac{y^2}{18}, \qquad z = \pm\frac{y}{3} \;\to\; \frac{y^2}{18} = \pm\frac{y}{3} \;\to y^2 = \pm 6y \;\to\; y^2 \pm 6y = 0 \;\to\; y(y \pm 6) = 0 \;\to \begin{cases} y = 0 \\ y = 6 \\ y = -6 \end{cases}$$

Con toda esta información podemos hacer el siguiente gráfico



La zona por encima a los trazos de la parábola y por debajo de las rectas rojas (que recuerden son el paraboloide y el cono respectivamente) es la zona de interés, si se realiza el análisis de manera similar para *y=0* (que no es sumamente necesario) se podrá ver el mismo comportamiento en ese plano, con toda esta información se puede hacer la gráfica 3D.



Entonces la idea es que hay un campo de vectores que atraviesa la capa verde (paraboloide) que está por debajo de la capa roja (cono) y a la capa roja que está por encima de la verde, son dos superficies que deben ser parametrizadas, y la intercepción se ve en el plano *xy* como una circunferencia de radio 6, al final los flujos que pasan por cada superficie se suman.

Los conos y paraboloides son recomendables parametrizarlos con coordenadas cilíndricas

Tener cuidado de que para hallar la *z* en ambas parametrizaciones se deben sustituir $x = \rho.\cos(\vartheta)$ y $y = \rho.\mathrm{sen}(\vartheta)$ en la expresión del campo escalar que modela a la superficie.

$$\phi_{cono} = \phi_1 = \begin{bmatrix} x = \rho.cos\,(\vartheta) \\ y = \rho.sen\,(\vartheta) \\ z = \rho/3 \end{bmatrix}, \qquad \phi_{1\rho} = \begin{bmatrix} cos\,(\vartheta) \\ sen(\vartheta) \\ 1/3 \end{bmatrix}, \qquad \phi_{1\vartheta} = \begin{bmatrix} -\rho.sen\,(\vartheta) \\ \rho.cos\,(\vartheta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\phi_{1\rho}\, x\, \phi_{1\vartheta}\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos(\vartheta) & sen(\vartheta) & 1/3 \\ -\rho.\mathrm{sen}(\vartheta) & \rho.\cos(\vartheta) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho.\cos(\vartheta)/3 \\ -\rho.\mathrm{sen}(\vartheta)/3 \\ \rho.cos^2(\vartheta) + \rho.sen^2(\vartheta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho.\cos(\vartheta)/3 \\ -\rho.\mathrm{sen}(\vartheta)/3 \\ \rho \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\rho}{3}.\begin{bmatrix} -\cos(\vartheta) \\ -sen(\vartheta) \\ 3 \end{bmatrix}$$

Antes de continuar veamos si este vector normal es el que necesitamos. Si la superficie S debe estar orientada hacia adentro entonces el vector normal del cono debe tener componente *z* negativa y no positiva, entonces el vector que necesitamos es el siguiente:

$$\left(\phi_{1\vartheta}\, x\, \phi_{1\rho}\right) = \frac{\rho}{3}.\begin{bmatrix} \cos(\vartheta) \\ sen(\vartheta) \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$(F \circ \phi_1) = \begin{bmatrix} 3.\rho^2.cos^2(\vartheta) \\ 5.\rho^2.sen^2(\vartheta) \\ 2\rho \end{bmatrix} = \rho.\begin{bmatrix} 3.\rho.cos^2(\vartheta) \\ 5.\rho.sen^2(\vartheta) \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(F\circ\phi_1).\left(\phi_{1\vartheta}\ x\ \phi_{1\rho}\right)=\frac{\rho^2}{3}.\begin{bmatrix}3.\rho.cos^2(\vartheta)\\5.\rho.sen^2(\vartheta)\\2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\cos(\vartheta)\\sen(\vartheta)\\-3\end{bmatrix}=\frac{\rho^2}{3}.(3\rho cos^3(\vartheta)+5\rho sin^3(\vartheta)-6)$$

Recordar que los valores para ρ y ϑ varian según nos moviéramos por un cilindro centrado en el origen con eje de simetría el eje z y radio 6, ya que existe una relación directa entre el radio y la altura en la parametrización.

$$\vartheta\in[0,2\pi],\qquad \rho\in[0,6]$$

La integral quedaría

$$\int_0^{2\pi}\int_0^6\frac{\rho^2}{3}.(3\rho cos^3(\vartheta)+5\rho sin^3(\vartheta)-6)\,d\rho d\vartheta$$

Es tentador realizar la integral de una vez pero dada ciertas similitudes entre los dominios de integración y las figuras realizaremos la segunda parametrización y veremos qué nos queda, antes de hacer los cálculos integrales, que bien pudieran hacerse de una vez.

$$\phi_{paraboloide}=\phi_2=\begin{bmatrix}x=\rho.cos\ (\vartheta)\\y=\rho.sen\ (\vartheta)\\z=\rho^2/18\end{bmatrix},\qquad \phi_{2\rho}=\begin{bmatrix}cos\ (\vartheta)\\sen(\vartheta)\\\rho/9\end{bmatrix},\qquad \phi_{2\vartheta}=\begin{bmatrix}-\rho.sen\ (\vartheta)\\\rho.cos\ (\vartheta)\\0\end{bmatrix}$$

$$\left(\phi_{2\rho}\ x\ \phi_{2\vartheta}\right)=\begin{vmatrix}i&j&k\\cos(\vartheta)&sen(\vartheta)&\rho/9\\-\rho.sen(\vartheta)&\rho.cos(\vartheta)&0\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}-\rho^2.cos(\vartheta)/9\\-\rho^2.sen(\vartheta)/9\\\rho.cos^2(\vartheta)+\rho.sen^2(\vartheta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\rho^2.cos(\vartheta)/9\\-\rho^2.sen(\vartheta)/9\\\rho\end{bmatrix}$$
$$=\frac{-\rho}{9}.\begin{bmatrix}\rho.cos(\vartheta)\\\rho.sen(\vartheta)\\-9\end{bmatrix}$$

Véase que este vector si apunta hacia el interior de S

$$(F\circ\phi_2)=\begin{bmatrix}3.\rho^2.cos^2(\vartheta)\\5.\rho^2.sen^2(\vartheta)\\\rho^2/3\end{bmatrix}=\rho^2.\begin{bmatrix}3.cos^2(\vartheta)\\5.sen^2(\vartheta)\\1/3\end{bmatrix}$$

$$(F\circ\phi_2).\left(\phi_{2\rho}\ x\ \phi_{2\vartheta}\right)=\frac{-\rho^3}{9}.\begin{bmatrix}3.cos^2(\vartheta)\\5.sen^2(\vartheta)\\1/3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\rho.cos(\vartheta)\\\rho.sen(\vartheta)\\-9\end{bmatrix}.=\frac{-\rho^3}{9}.(3\rho cos^3(\vartheta)+5\rho sin^3(\vartheta)-3)$$

Son los mismos valores para ϑ y ρ (recordar el porqué)

$$\vartheta\in[0,2\pi],\qquad \rho\in[0,6]$$

La integral quedaría

$$\int_0^{2\pi}\int_0^6\frac{-\rho^3}{9}.(3\rho cos^3(\vartheta)+5\rho sin^3(\vartheta)-3)\,d\rho d\vartheta$$

Por las propiedades de las integrales y recordando que los flujos al final se sumaran, porque se está buscando el flujo total, tenemos

$$\Pi = \int_0^{2\pi}\int_0^6 \left[-\frac{\rho^3}{9}.(3\rho cos^3(\vartheta)+5\rho sin^3(\vartheta)-3)+\frac{\rho^2}{3}.(3\rho cos^3(\vartheta)+5\rho sin^3(\vartheta)-6)\right] d\rho d\vartheta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^6 \left[-\frac{\rho^3}{9}.\left(3\rho cos^3(\vartheta)+5\rho sin^3(\vartheta)\right)+3.\left(\frac{\rho^3}{9}\right)+\frac{\rho^2}{3}.\left(3\rho cos^3(\vartheta)+5\rho sin^3(\vartheta)\right)-6.\left(\frac{\rho^2}{3}\right)\right] d\rho d\vartheta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^6 \left[-\frac{\rho^3}{9}.\left(3\rho cos^3(\vartheta)+5\rho sin^3(\vartheta)\right)+\frac{\rho^3}{3}+\frac{\rho^2}{3}.\left(3\rho cos^3(\vartheta)+5\rho sin^3(\vartheta)\right)-2\rho^2\right] d\rho d\vartheta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^6 \left[\left(3\rho cos^3(\vartheta)+5\rho sin^3(\vartheta)\right).\left(-\frac{\rho^3}{9}+\frac{\rho^2}{3}\right)+\frac{\rho^3}{3}-2\rho^2\right] d\rho d\vartheta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^6 \left[\rho\left(3cos^3(\vartheta)+5sin^3(\vartheta)\right).\left(-\frac{\rho^3}{9}+\frac{\rho^2}{3}\right)+\frac{\rho^3}{3}-2\rho^2\right] d\rho d\vartheta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^6 \left[\left(3cos^3(\vartheta)+5sin^3(\vartheta)\right).\left(-\frac{\rho^4}{9}+\frac{\rho^3}{3}\right)+\frac{\rho^3}{3}-2\rho^2\right] d\rho d\vartheta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^6 \left[\frac{\rho^3}{3}-2\rho^2+\left(3cos^3(\vartheta)+5sin^3(\vartheta)\right).\left(-\frac{\rho^4}{9}+\frac{\rho^3}{3}\right)\right] d\rho d\vartheta =$$

Para integrar respecto a ρ el término $\left(3cos^3(\vartheta)+5sin^3(\vartheta)\right)$ es una constante que podemos llamar a

$$\int_0^{2\pi}\int_0^6 \left[\frac{\rho^3}{3}-2\rho^2+a.\left(-\frac{\rho^4}{9}+\frac{\rho^3}{3}\right)\right] d\rho d\vartheta = \int_0^{2\pi}\left(-36-a.\frac{324}{5}\right)d\vartheta =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(-36-\left(3cos^3(\vartheta)+5sin^3(\vartheta)\right).\frac{324}{5}\right)d\vartheta =$$

$$-36\int_0^{2\pi} d\vartheta-\frac{324}{5}\int_0^{2\pi}\left(3cos^3(\vartheta)+5sin^3(\vartheta)\right)d\vartheta =$$

$$-36\int_0^{2\pi} d\vartheta-\frac{324}{5}.\left(3.\int_0^{2\pi} cos^3(\vartheta)\,d\vartheta+5.\int_0^{2\pi} sin^3(\vartheta)\,d\vartheta\right)$$

Sabiendo que el seno y el coseno (sin importar a que potencia IMPAR estén elevados) integrados en su período dan cero

$$\Pi = -36\int_0^{2\pi} d\vartheta-\frac{1404}{5}.0 = -72\pi$$

Respuesta:

$$\Pi = -72\pi$$

Ejercicio 3: *Calcular el flujo del campo vectorial F a través del volumen que resulta de interceptar las superficies S_1 y S_2, para S_1 un vector normal saliente y para S_2 un vector normal entrante.*

$$F(r) = (x, 0, -z), \qquad S_1: \{z = 6 - x^2 - y^2\}, \qquad S_2: \left\{z = \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$

Solución:

Identificamos las superficies:

$$z = 6 - x^2 - y^2 \rightarrow \ (6 - z) = x^2 + y^2$$

$(6 - z) = x^2 + y^2$: Paraboloide centrado en *(0, 0, 6)*, crece hacia abajo.

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$: Cono centrado en el origen, crece hacia arriba.

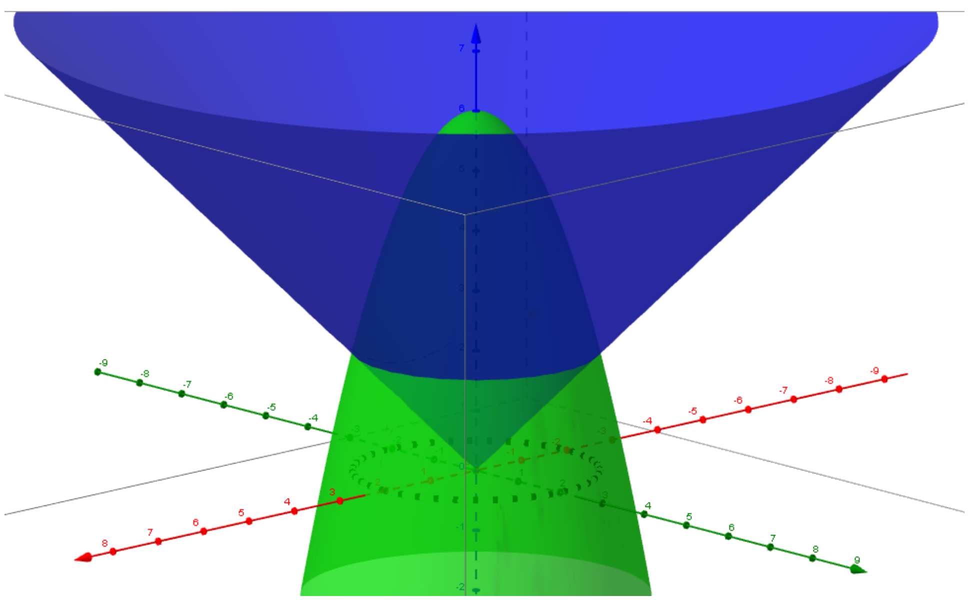
Vemos donde de interceptan buscando primero el valor de *z*.

$$\begin{cases} (6 - z) = x^2 + y^2 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \rightarrow \ z^2 = (6 - z) \ \rightarrow \ z^2 + z - 6 = 0 \ \rightarrow \begin{cases} z = 2\ (tomamos\ este) \\ z = -3 \end{cases}$$

$$(6 - z) = x^2 + y^2 \ \rightarrow \ (6 - 2) = x^2 + y^2 \ \rightarrow \ x^2 + y^2 = 2^2$$

En el plano *xy* la intercepción se ve como una circunferencia de radio 2

Graficamos las superficies



Empezamos parametrizando la parábola

$$\phi_{paraboloide} = \phi_1 = \begin{bmatrix} x = \rho.cos\ (\vartheta) \\ y = \rho.sen\ (\vartheta) \\ z = 6 - \rho^2 \end{bmatrix}, \qquad \phi_{1\rho} = \begin{bmatrix} cos\ (\vartheta) \\ sen(\vartheta) \\ -2\rho \end{bmatrix}, \qquad \phi_{2\vartheta} = \begin{bmatrix} -\rho.sen\ (\vartheta) \\ \rho.cos\ (\vartheta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\phi_{1\rho}\ x\ \phi_{1\vartheta}\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ cos(\vartheta) & sen(\vartheta) & -2\rho \\ -\rho.sen(\vartheta) & \rho.cos(\vartheta) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2\rho^2.cos(\vartheta) \\ 2\rho^2.sen(\vartheta) \\ \rho \end{bmatrix}$$

Vea que el vector es saliente a la superficie, entonces el otro vector que encontremos también deberá serlo.

$$(F \circ \phi_1) = \begin{bmatrix} \rho.cos(\vartheta) \\ 0 \\ \rho^2 - 6 \end{bmatrix}$$

$$(F \circ \phi_1).\left(\phi_{1\rho} \; x \; \phi_{1\vartheta} \right) = \begin{bmatrix} \rho.cos(\vartheta) \\ 0 \\ \rho^2 - 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2\rho^2.cos(\vartheta) \\ 2\rho^2.sen(\vartheta) \\ \rho \end{bmatrix} = 2\rho^3.cos^2(\vartheta) + \rho^3 - 6\rho = \rho^3(2.cos^2(\vartheta) + 1) - 6\rho$$

Ahora, la formación de la parábola inicia en el punto donde está centrado su origen, por lo que los valores de ρ van desde que la parábola era pequeña hasta que creció, en nuestro caso crece hasta $\rho = 2$, que es el radio de la circunferencia en el espacio a una altura *z=2* (que era la curva de intercepción de las superficies), teniendo eso en cuenta y recordando Theta

$$\rho \in [0,2], \qquad \vartheta \in [0,2\pi]$$

La primera integral de flujo es:

$$\Pi_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2} \rho^3(2.cos^2(\vartheta) + 1) - 6\rho \; d\rho d\vartheta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^4}{4}(2.cos^2(\vartheta) + 1) - 3\rho^2 \right]_0^2 d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2^4}{4}(2.cos^2(\vartheta) + 1) - 3.2^2 \right) d\vartheta = 8\int_0^{2\pi} cos^2(\vartheta) \; d\vartheta + 4\int_0^{2\pi} d\vartheta - 12\int_0^{2\pi} d\vartheta = -8\pi$$

Parametrizamos ahora el cono

$$\phi_{cono} = \phi_2 = \begin{bmatrix} x = \rho.cos\,(\vartheta) \\ y = \rho.sen\,(\vartheta) \\ z = \rho \end{bmatrix}, \qquad \phi_{2\rho} = \begin{bmatrix} cos\,(\vartheta) \\ sen(\vartheta) \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \phi_{2\vartheta} = \begin{bmatrix} -\rho.sen\,(\vartheta) \\ \rho.cos\,(\vartheta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\phi_{2\rho} \; x \; \phi_{2\vartheta} \right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ cos(\vartheta) & sen(\vartheta) & 1 \\ -\rho.sen(\vartheta) & \rho.cos(\vartheta) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho.cos(\vartheta) \\ -\rho.sen\,(\vartheta) \\ \rho \end{bmatrix}$$

Vea que el vector es entrante a la superficie, debemos considerar el vector que resulta de producto cruz inverso.

$$\left(\phi_{2\vartheta} \; x \; \phi_{2\rho} \right) = \begin{bmatrix} \rho.cos(\vartheta) \\ \rho.sen\,(\vartheta) \\ -\rho \end{bmatrix}$$

$$(F \circ \phi_2) = \begin{bmatrix} \rho.cos(\vartheta) \\ 0 \\ -\rho \end{bmatrix}$$

$$(F \circ \phi_1).\left(\phi_{1\rho} \; x \; \phi_{1\vartheta} \right) = \begin{bmatrix} \rho.cos(\vartheta) \\ 0 \\ -\rho \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \rho.cos(\vartheta) \\ \rho.sen\,(\vartheta) \\ -\rho \end{bmatrix} = \rho^2 cos^2(\vartheta) + \rho^2$$

Deseando recorrer la superficie del cono desde el origen hasta *z=2* tenemos

$$\rho \in [0,2], \qquad \vartheta \in [0,2\pi]$$

Así la segunda integral del flujo queda como

$$\Pi_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2} \rho^2 cos^2(\vartheta) + \rho^2 \, d\rho d\vartheta = \int_0^{2\pi} \int_0^{2} \rho^2 . (cos^2(\vartheta) + 1) \, d\vartheta = \int_0^{2\pi} \frac{2^3}{3} . (cos^2(\vartheta) + 1) \, d\vartheta$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{2\pi} cos^2(\vartheta) d\vartheta + \frac{8}{3}\int_0^{2\pi} d\vartheta = 8\pi$$

Respuesta:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -8\pi + 8\pi = 0$$

Ejercicio 4: *Encontrar el flujo del campo F a través del sólido formado por las superficies S_1, S_2 y S_3*

$$F(r) = (x, y, z), \qquad S_1: \left\{ z = 2 + \frac{(x^2 + y^2)}{8} \right\}, \qquad S_2: \{x^2 + (y - 4)^2 = 4\},$$
$$S_3: \{x^2 + (y - 4)^2 \leq 4 \; si \; z = 1\}$$

Si la superficie está orientada hacia el exterior

Solución:

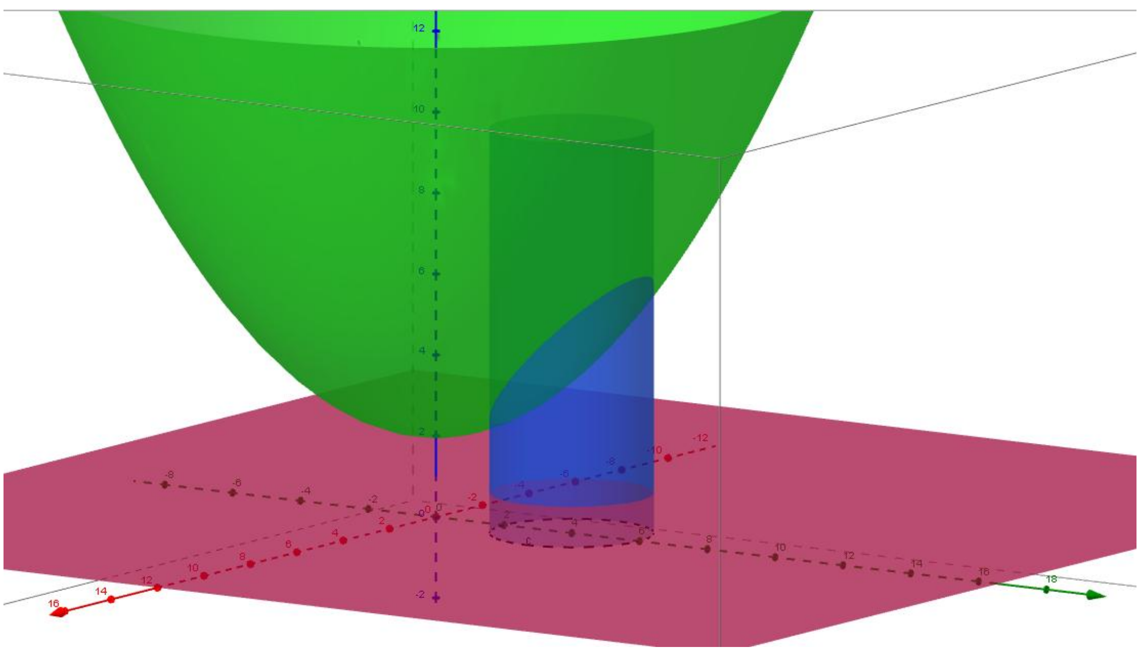
Identificamos las superficies

$z = 2 + \frac{(x^2+y^2)}{8}$: Paraboloide centrado en *(0, 0, 2,)*, crece hacia valores positivos de *z*, crece más lento en un factor de 8.

$x^2 + (y - 4)^2 = 4$: Cilindro centrado en *(0, 4, 0)* de radio 2 con eje central paralelo al eje *z*.

$x^2 + (y - 4)^2 \leq 4 \; si \; z = 1$: Círculo centrado en *(0, 4, 1)* de radio 2 con vector normal paralelo al eje *z*.

Con esta información se tiene suficiente para hacer una gráfica aproximada que nos ayude



En esta imagen el plano morado representa el plano $z = 1$ donde vive el círculo que "tapa" a nuestro sólido inferiormente.

Teniendo claro que son tres parametrizaciones que debemos hacer iniciamos con el paraboloide

$$\phi_{paraboloide} = \phi = \begin{bmatrix} x = x \\ y = y \\ z = 2 + \dfrac{(x^2 + y^2)}{8} \end{bmatrix}, \qquad \phi_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x/4 \end{bmatrix}, \qquad \phi_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ y/4 \end{bmatrix}$$

$$(\phi_x \; x \; \phi_y) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & x/4 \\ 0 & 1 & y/4 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -x/4 \\ -y/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vea que este vector es saliente a nuestra superficie de interés

Interceptamos el campo con la parametrización

$$(F\circ\phi) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 2+\dfrac{(x^2+y^2)}{8} \end{bmatrix}$$

$$(F\circ\phi).\left(\phi_x\ x\ \phi_y\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 2+\dfrac{(x^2+y^2)}{8} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -x/4 \\ -y/4 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{-x^2}{4}-\frac{y^2}{4}+2+\frac{(x^2+y^2)}{8} = 2-\frac{(x^2+y^2)}{8}$$

En las parametrizaciones canónicas nos movemos sobre la "mancha" en el plano *xy* que deja la zona de interés, para los valores de *x* tomo el valor de *y* donde está centrado el cilindro y lo sustituyo en la misma expresión del cilindro, para los valores de *y* despejo la *x* de la expresión del cilindro y así

$$x\in[-2,2],\qquad y\in\left[4-\sqrt{4-x^2},\qquad 4+\sqrt{4-x^2}\right]$$

Armamos la integral del primer flujo

$$\Pi_1 = \int_{-2}^{2}\int_{4-\sqrt{4-x^2}}^{4+\sqrt{4-x^2}}\left[2-\frac{(x^2+y^2)}{8}\right]dydx$$

Cambiando a coordenadas polares, y teniendo en cuenta que la variable *y* esta desplazada 4 unidades en su propio eje

$$\begin{cases} x=\rho.cos\,(\vartheta) \\ y=\ \rho.sin\,(\vartheta)+4, \\ \quad Jb=\ \rho \end{cases}\qquad \begin{matrix}\vartheta\ \in\ [0,2\pi] \\ \rho\in[0,2]\end{matrix}$$

$$\Pi_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^2\rho.\left[2-\frac{((\rho.cos\,(\vartheta))^2+(\rho.sin(\vartheta)+4)^2)}{8}\right]d\rho d\vartheta =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^2\rho.\left[\frac{\rho^2}{8}+\rho.sin\,(\vartheta)\right]d\rho d\vartheta = -\pi$$

Continuemos con el cilindro

$$\Lambda = \begin{bmatrix} x=2cos(\vartheta) \\ y=2sen(\vartheta)+4 \\ z=z \end{bmatrix},\qquad \Lambda_\vartheta = \begin{bmatrix} -2sen(\vartheta) \\ 2cos\,(\vartheta) \\ 0 \end{bmatrix},\qquad \Lambda_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\Lambda_\vartheta\ x\ \Lambda_y\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2sen(\vartheta) & 2\cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos(\vartheta) \\ 2sen(\vartheta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vea que este vector es saliente a nuestra superficie de interés

Interceptamos el campo con la parametrización

$$(F \circ \Lambda) = \begin{bmatrix} 2cos(\vartheta) \\ 2sen(\vartheta) + 4 \\ z \end{bmatrix}$$

$$(F \circ \Lambda).\left(\Lambda_\vartheta \; x \; \Lambda_y \right) = \begin{bmatrix} 2cos(\vartheta) \\ 2sen(\vartheta) + 4 \\ z \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2\,cos(\vartheta) \\ 2sen(\vartheta) \\ 0 \end{bmatrix} = 4 + 8sen(\vartheta)$$

Ahora bien, es fácil ver los valores para Theta, pero los de *z* no son triviales tenga presente que el cilindro que nos interesa va desde *z=1* hasta los z del paraboloide, esto implica tomar el paraboloide e interceptarlo con la parametrización para saber cómo se ve este en el "nuevo universo" definido por nuestra Λ.

$$z = 2 + \frac{(x^2 + y^2)}{8} \;\; \rightarrow \;\; z = 2 + \frac{((2cos(\vartheta))^2 + (2sen(\vartheta) + 4)^2)}{8} = \frac{9}{2} + 2sen(\vartheta)$$

Con esta información podemos definir el dominio de la parametrización

$$\vartheta \in [0,2\pi], \qquad z \in \left[1, \frac{9}{2} + 2sen(\vartheta)\right]$$

Armando la integral

$$\Pi_2 = \int_0^{2\pi} \int_1^{\left(\frac{9}{2}+2sen(\vartheta)\right)} (4 + 8sen(\vartheta))\, dzd\vartheta = 44\pi$$

Por último el círculo

$$E = \begin{bmatrix} x = \rho.cos(\vartheta) \\ y = \rho.sen(\vartheta) + 4 \\ z = 1 \end{bmatrix}, \qquad E_\rho = \begin{bmatrix} cos(\vartheta) \\ sen(\vartheta) \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad E_\vartheta = \begin{bmatrix} -\rho sen(\vartheta) \\ \rho cos(\vartheta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(E_\rho \; x \; E_\vartheta \right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ cos(\vartheta) & sen(\vartheta) & 0 \\ -\rho.sen(\vartheta) & \rho.cos(\vartheta) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{bmatrix}$$

Vea que este vector no es saliente a nuestra superficie de interés, entonces se considera

$$\left(E_\vartheta \; xE_\rho \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho \end{bmatrix}$$

Interceptamos el campo con la parametrización

$$(F \circ E) = \begin{bmatrix} \rho.cos(\vartheta) \\ \rho.sen(\vartheta) + 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(F \circ E).\left(E_\vartheta \; xE_\rho \right) = \begin{bmatrix} \rho.cos(\vartheta) \\ \rho.sen(\vartheta) + 4 \\ 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho \end{bmatrix} = -\rho$$

No debería ser difícil ver que

$$\vartheta \in [0,2\pi], \qquad \rho \in [0,2]$$

Armando la integral

$$\Pi_3 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2} -\rho \, d\rho d\vartheta = -4\pi$$

Respuesta:

$$\Pi = -\pi + 44\pi - 4\pi = 39\pi$$

Hagamos un repaso de las técnicas usadas en este ejercicio.

Primero que nada se escogió la parametrización canónica para el paraboloide, dada la facilidad de poder integrar sobre la "mancha" que deja en el plano *xy*, con la parametrización cilíndrica se tienen mejores resultados cuando la integración se realiza con alguno de los ejes *x*, *y* o *z* como eje central, sería buen ejercicio tratar de calcular el flujo Π_1 usando coordenadas cilíndricas. En segundo lugar tenga en cuenta el hecho de que al parametrizar superficies que no están centradas en el origen la coordenada desplazada debe desplazarse también en la parametrización como vimos anteriormente, esto claro si se desea que Theta y Ro actúen a como estamos acostumbrados, con Ro naciendo desde el "origen" del objeto y Theta dando una vuelta de 360°. Por último vale la pena mencionar que estos cálculos solo tienen sentido cuando la superficie está orientada, esto es, que todas las otras superficies que se interceptan para formarla tienen vectores normales que van en una misma dirección, o todos apuntan dentro o todos apuntan fuera.

Integrales sobre campos escalares.

Ejercicio 1: *Calcular el centro de masa de la porción de la esfera no homogénea de radio* ***a*** *situada en el primer octante.*

La densidad en la esfera está dada por el siguiente campo escalar

$$\sigma(x,y,z) = z^2 . sen\left(2. tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right) + 2xy$$

Se recomienda hacer una parametrización por coordenadas esféricas.

Solución:

Lo primero es calcular la masa de la porción de esfera, para esto parametrizamos la esfera y encontramos el módulo del vector producto fundamental

$$\phi = \begin{bmatrix} x = a\, cos(\vartheta) . cos(\varphi) \\ y = a\, sen(\vartheta) . cos(\varphi) \\ z = a sen(\varphi) \end{bmatrix}, \qquad \phi_\vartheta = \begin{bmatrix} -a. sin(\vartheta) . cos(\varphi) \\ a. cos(\vartheta) . cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \phi_\varphi = \begin{bmatrix} -a. cos(\vartheta) . sin(\varphi) \\ -a. sin(\vartheta) . sin(\varphi) \\ a. cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$\left(\phi_\vartheta \text{ x } \phi_\varphi\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -sin(\vartheta) & cos(\vartheta) & 0 \\ -cos(\vartheta)\ . sin(\varphi) & -sin(\vartheta) . sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{vmatrix} . a^2 cos(\varphi) = \begin{bmatrix} cos(\vartheta) . cos(\varphi) \\ cos(\varphi) . sin(\vartheta) \\ sin(\varphi) \end{bmatrix} . a^2 cos(\varphi)$$

$$\left| \phi_\vartheta\ x\ \phi_\varphi \right| = a^2 cos(\varphi). \sqrt{cos^2(\vartheta) . cos^2(\varphi) + cos^2(\varphi) . sin^2(\vartheta) + sin^2(\varphi)} =$$
$$= a^2 cos(\varphi). \sqrt{cos^2(\varphi) . (cos^2(\vartheta) + sin^2(\vartheta)) + sin^2(\varphi)} = a^2 cos(\varphi)$$

Procedemos interceptar el campo escalar que indica la densidad superficial de la esfera con la parametrización

$$(\sigma \circ \phi) = (a. sin(\varphi))^2 . sen\left(2. tan^{-1}\left(\frac{a\, sin(\vartheta) . cos(\varphi)}{a\, cos(\vartheta) . cos(\varphi)}\right)\right) + 2. a\, cos(\vartheta) . cos(\varphi). a\, sin(\vartheta) . cos(\varphi) =$$

$$= a^2 . sin^2(\varphi) . sen\left(2. tan^{-1}\left(\frac{sin(\vartheta)}{cos(\vartheta)}\right)\right) + a^2 . (2\, sin(\vartheta)\, cos(\vartheta)). cos^2(\varphi) =$$

$$= a^2\left(sin^2(\varphi) . sen\left(2. tan^{-1}(\tan(\vartheta))\right) + sin(2\vartheta) . cos^2(\varphi)\right) =$$

$$= a^2 (sin^2(\varphi) . sen(2\vartheta) + sin(2\vartheta) . cos^2(\varphi)) = a^2 . sen(2\vartheta). (sin^2(\varphi) + cos^2(\varphi)) = a^2 . sen(2\vartheta)$$

$$(\sigma \circ \phi) = a^2 . sen(2\vartheta)$$

Y no debería ser difícil ver que

$$\vartheta \in [0, \pi/2], \qquad \varphi \in [0, \pi/2]$$

Armando la integral de masa

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 . sen(2\vartheta). a^2 . cos(\varphi)\ d\varphi d\vartheta =$$

$$= a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(2\vartheta). cos(\varphi)\ d\varphi d\vartheta = a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(2\vartheta) d\vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(\varphi) d\varphi = a^4 . 1.1 = a^4$$

Ahora calculemos las coordenadas del centro de masa

Coordenada *x*

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int\int x.\sigma\ ds = \frac{1}{a^4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(a\,cos(\vartheta)\,.\,cos(\varphi)\big).\big(a^2.sen(2\vartheta)\big)\,d\varphi d\vartheta =$$

$$= \frac{a^3}{a^4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sen(2\vartheta).cos(\vartheta)).\big(cos(\varphi)\big)\,d\varphi d\vartheta = \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(2\vartheta).cos(\vartheta)\,d\vartheta\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{a}.\left[\frac{-2cos^2(\vartheta)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}.\,[sen(\varphi)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3a}$$

Coordenada *y*

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int\int y.\sigma\ ds = \frac{1}{a^4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(a.sen(\vartheta)\,.\,cos(\varphi)\big).\big(a^2.sen(2\vartheta)\big)\,d\varphi d\vartheta =$$

$$\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(2\vartheta).sen(\vartheta)\,d\vartheta\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(\varphi)\,d\varphi = \frac{2}{3a}$$

Coordenada *z*

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\int\int z.\sigma\ ds = \frac{1}{a^4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a.sen(\varphi)).\big(a^2.sen(2\vartheta)\big)\,d\varphi d\vartheta =$$

$$\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(2\vartheta)\,d\vartheta\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{a}$$

Respuesta:

$$\bar{x} = \frac{2}{3a}, \qquad \bar{y} = \frac{2}{3a}, \qquad \bar{z} = \frac{1}{a}$$

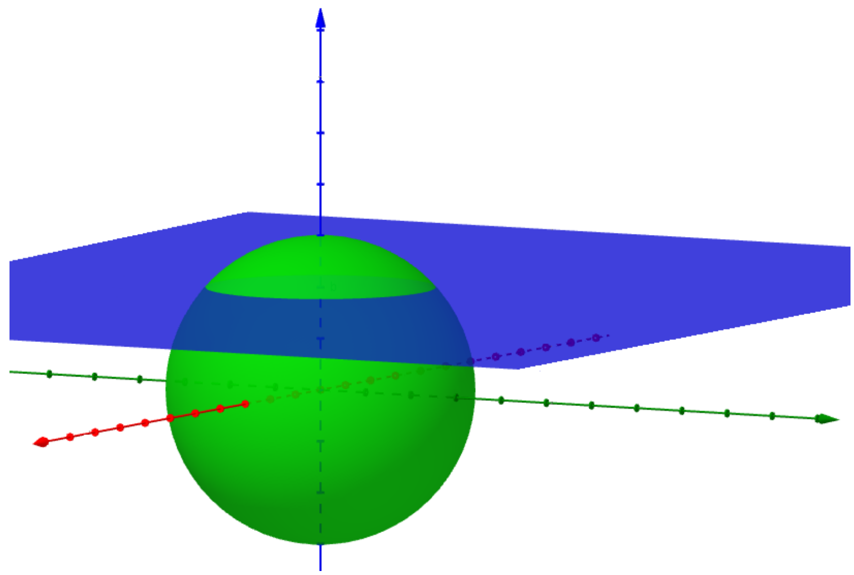
Vea que si la densidad superficial no es constante entonces no se pueden asumir similitudes entre las coordenadas del centro de masa dada la simetría de la figura.

Ejercicio 2: *Calcular las coordenadas del centro de masa de un casquete esférico homogéneo de la esfera*

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ *Interceptada con el plano z=a, a>0.*

Solución:

Graficamos las superficies en cuestión.



Lo primero es encontrar la masa de la esfera, sabemos que esto es ver el efecto del campo escalar de la densidad superficial de la esfera sobre la superficie que resulta de la intercepción, tengamos en cuenta que la densidad superficial es una constante dado que la esfera es homogénea, esto es:

$$M = \iint (\sigma \circ \phi). \left| \phi_\vartheta \text{ x } \phi_\varphi \right| d\varphi d\vartheta$$

Donde σ es el campo escalar de la densidad superficial y la integral se realiza sobre toda la esfera (si se quisiera su masa total) o sobre el casquete (que es lo que se pide).

Parametrizamos la esfera y encontramos el módulo del vector producto fundamental

$$\phi = \begin{bmatrix} x = x \\ y = y \\ z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \end{bmatrix}, \qquad \phi_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \end{bmatrix}, \qquad \phi_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{-y}{\sqrt{r - x^2 - y^2}} \end{bmatrix}$$

$$(\phi_x \text{x } \phi_y) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \\ 0 & 1 & \dfrac{-y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} x/\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \\ y/\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|\phi_x \text{x } \phi_y| = \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + r^2 - x^2 - y^2}{r^2 - x^2 - y^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$$

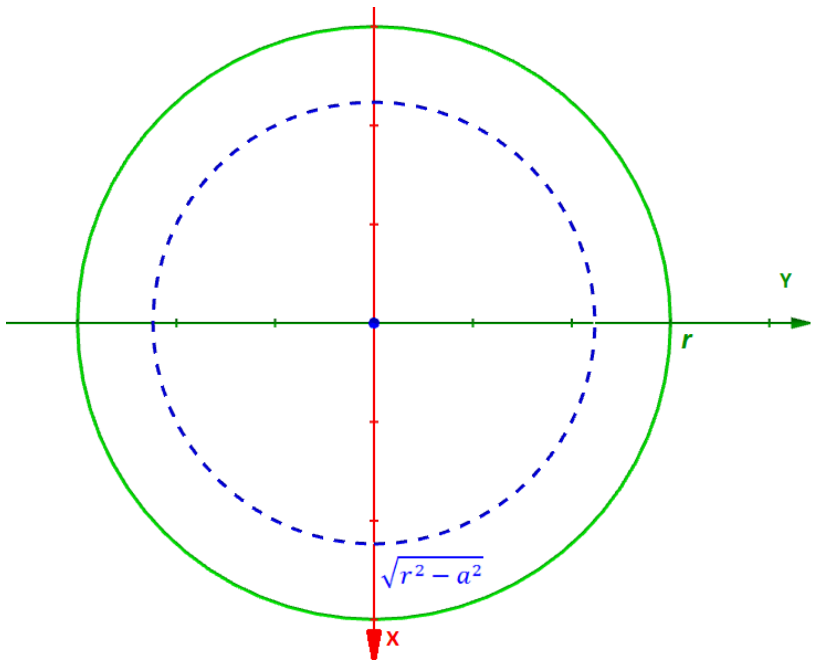
Como $\sigma = Cte$, entonces

$$(\sigma \circ \phi) = Cte = k$$

La integral debe realizarse solo sobre la “mancha” en el plano *xy*, para esto debemos interceptar la esfera con el plano analíticamente.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ z = a \end{cases} \rightarrow \ x^2 + y^2 + a^2 = r^2 \ \rightarrow \ x^2 + y^2 = r^2 - a^2 \ \rightarrow \ x^2 + y^2 = \left(\sqrt{r^2 - a^2}\right)^2$$

Si lo vemos gráficamente



Las variables de integración serían

$$x \in \left[-\sqrt{r^2 - a^2}, \sqrt{r^2 - a^2}\right], \qquad y \in \left[-\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}, \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\right]$$

La masa del casquete es

$$M = \int_{-\sqrt{r^2-a^2}}^{\sqrt{r^2-a^2}} \int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} \frac{k.r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \, dydx$$

Cambiando a coordenadas polares

$$\begin{cases} x = \rho . cos\ (\vartheta) \\ y = \rho . sin\ (\vartheta)\, , \\ Jb = \rho \end{cases} \qquad \begin{matrix} \vartheta \in [0,2\pi] \\ \rho \in \left[0, \sqrt{r^2 - a^2}\right] \end{matrix}$$

$$M = k.r \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{r^2-a^2}} \frac{\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \, d\rho d\vartheta = 2\pi k r (r - a)$$

Ahora pasamos a calcular la posición del centro de masa, recordando que por simetría

$$\bar{x} = \bar{y} = 0$$

Entonces

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\int\int z.\sigma\ ds = \frac{k}{2\pi kr(r-a)}\int_{-\sqrt{r^2-a^2}}^{\sqrt{r^2-a^2}}\int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\frac{z.r}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\,dydx$$

Aquí la pregunta puede ser ¿Qué hacemos con z? y es simple, por la parametrización $z = \sqrt{r^2-x^2-y^2}$

$$\bar{z} = \frac{1}{2\pi(r-a)}\int_{-\sqrt{r^2-a^2}}^{\sqrt{r^2-a^2}}\int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\frac{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\,dydx =$$

$$= \frac{1}{2\pi(r-a)}\int_{-\sqrt{r^2-a^2}}^{\sqrt{r^2-a^2}}\int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} 1\ dydx$$

Tengamos presente que el siguiente término no es otra cosa que el área del círculo sobre el que estamos integrando

$$\int_{-\sqrt{r^2-a^2}}^{\sqrt{r^2-a^2}}\int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} 1\ dydx = \pi(r^2-a^2)$$

Finalmente

$$\bar{z} = \frac{\pi(r^2-a^2)}{2\pi(r-a)} = \frac{a+r}{2}$$

Respuesta:

$$\bar{x} = 0, \qquad \bar{y} = 0, \qquad \bar{z} = \frac{a+r}{2}$$

Se deja como ejercicio rehacer este problema utilizando la parametrización esférica y tomando los siguientes valores

$$r = \sqrt{2}, \qquad a = 1$$

Respuesta:

$$M = 8\pi k$$

$$\bar{x} = 0, \qquad \bar{y} = 0, \qquad \bar{z} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

Campos conservativos.

Aunque esta sección posee solo dos ejercicios sobre campos conservativos (debido a la facilidad en cuanto a la resolución de ejercicios), vale la pena tomarnos un momento para analizar este tema más a fondo, y sobre todo entender la relación que guarda con algunos conceptos físicos interesantes.

Por campos vectoriales siempre hemos tenido presente una idea intuitiva en cuanto a lo que son: un mar de infinitas flechas que se mueven de alguna forma en el espacio o en el plano, estos son algunos ejemplo

Imagen 1

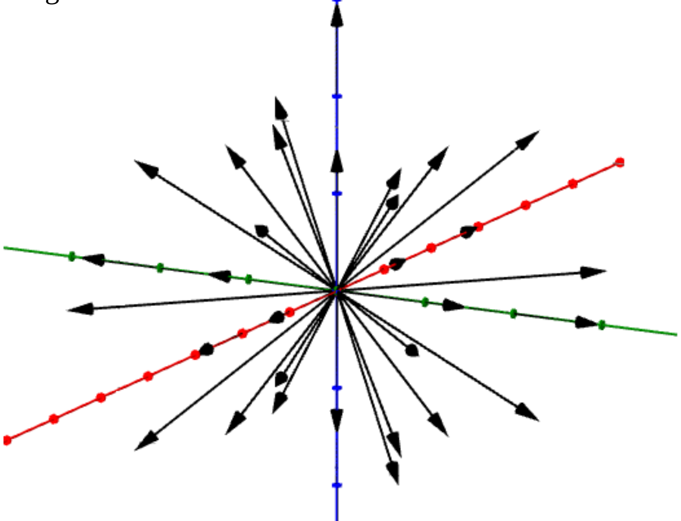


Imagen 2

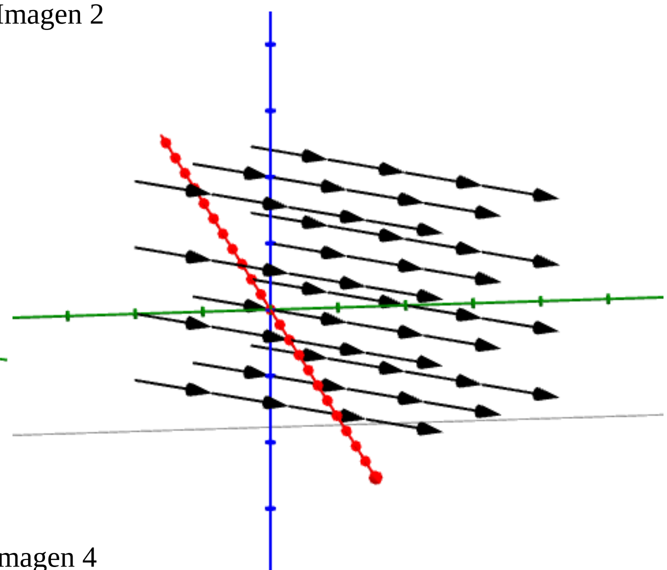


Imagen 3

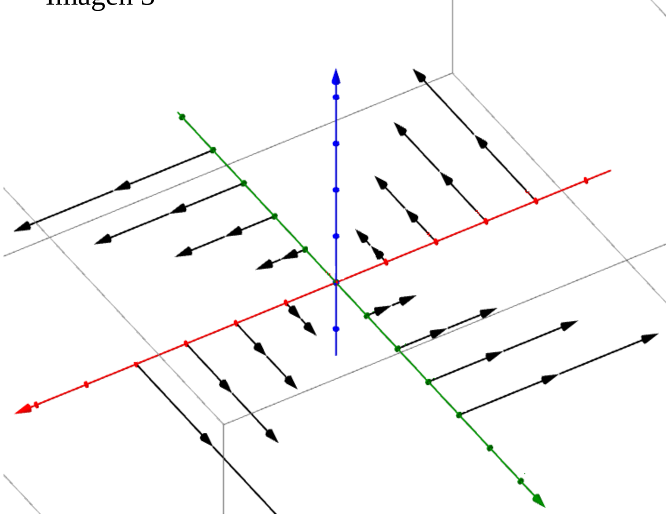
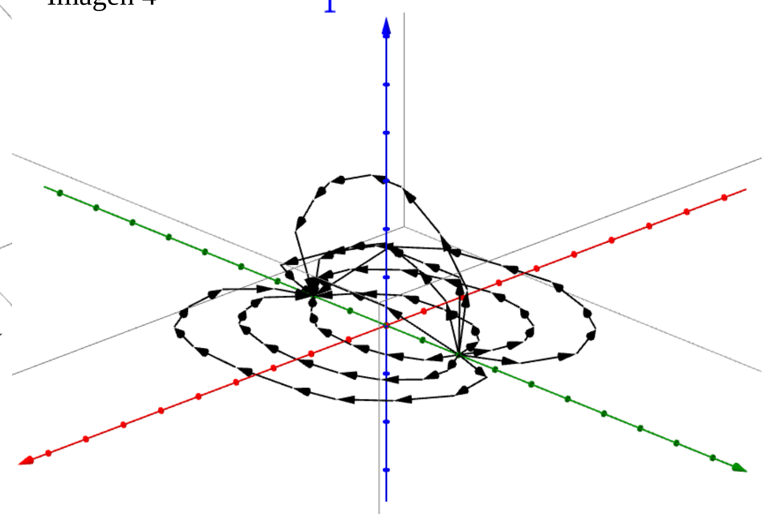


Imagen 4



Aunque esta idea intuitiva es útil, para poder trabajar con los campos es necesario tener a la mano una definición matemática clara. Los campos vectoriales no son más que una función F que cumple

$$F: R^n \to R^n$$

En nuestro caso por lo general tendremos campos que se van a restringir a lo siguiente

$$F(x,y): R^2 \to R^2 \text{ ó } F(x,y,z): R^3 \to R^3$$

Esto debido a que vemos un curso de matemáticas para aplicaciones en ingeniería, entonces estaremos en dos o tres dimensiones.

Por otro lado los campos escalares son funciones f de la forma

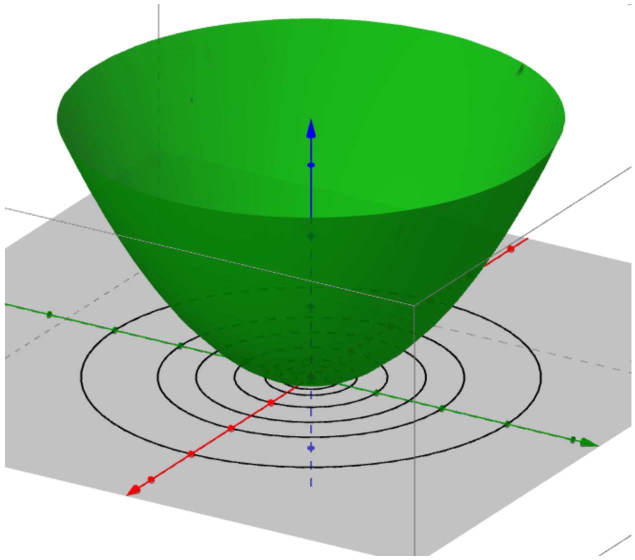
$$f: R^n \to R$$

Para ingeniería trabajamos con

$$f(x,y): R^2 \to R \quad y \quad f(x,y,z): R^3 \to R$$

Las gráficas de un campo escalar de la forma $f(x,y)$ se ven como las habituales superficies con las que hemos venido trabajando, y para analizar este tipo de campos por lo general se utilizan las *curvas de nivel*, a continuación un ejemplo

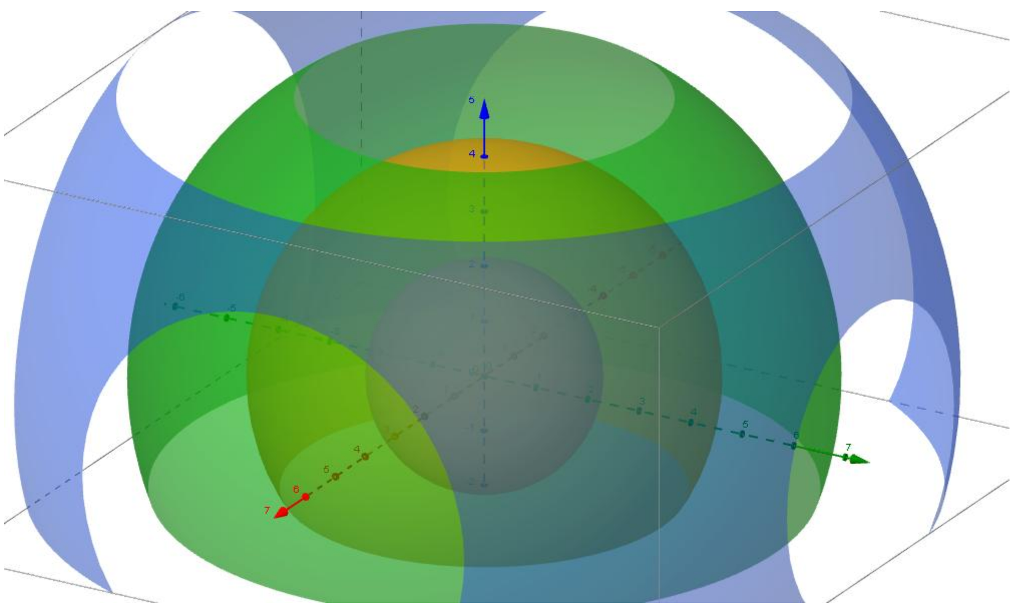
$$f(x,y) = x^2 + y^2$$



La gráfica del campo está en color verde, y las curvas de nivel son las circunferencias en el plano *xy*

Si el campo escalar es de la forma $f(x,y,z)$ entonces ya no existe solo una superficie si no que existen infinitas superficies que representan al campo, están son entonces *superficies de nivel*, un ejemplo es

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$



Un caso particular es tomar el campo e igualarlo a una constante, de aquí se deriva la superficie común de una esfera.

Ahora bien, ya que conocemos sobre campos escalares y vectoriales veamos algo interesante en las imágenes 1 y 2, aquí el campo parece ir siempre en una misa dirección, este no cambia de rumbo, en cambio en las imágenes 2 y 4 parece que esta rotando o de alguna forma gira en el espacio.

La teoría de los campos conservativos trata justamente estos fenómenos en los campos, al calcular el rotacional de un campo vectorial el resultado de la operación nos puede dar una buena idea sobre si este campo está girando en el espacio o no. Si un campo gira en el espacio entonces el resultado de su rotacional será otro campo vectorial que me dice que tanto o como gira el primero, si esta idea parece muy abstracta recuerde la expresión física para el torque y el significado del resultado.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \, x \, \vec{F}$$

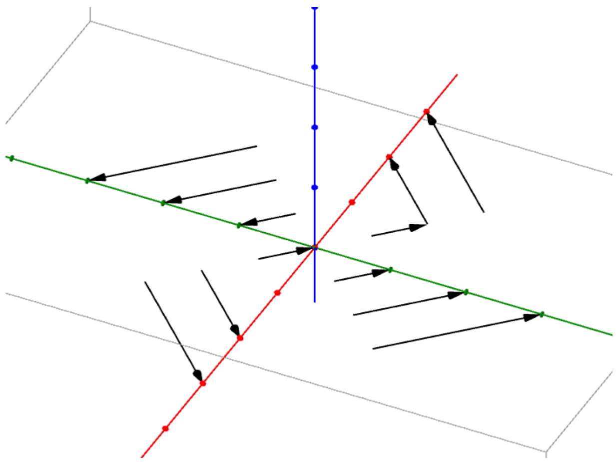
El vector $\vec{\tau}$ da una buena idea de que tanto ha rotado el vector $\vec{r}$ hacia el vector $\vec{F}$ considerando la orientación y la magnitud de $\vec{\tau}$.

Aplicar un rotacional es lo mismo solo que el resultado es todo un campo vectorial, hagamos un ejemplo gráfico.

Tomemos el siguiente campo vectorial

$$F(r) = (-y^3, x^3, 0)$$

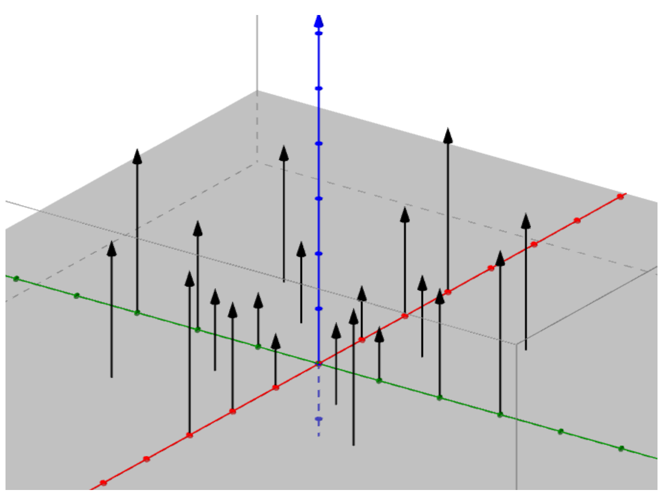
Tratemos de graficar algunas de las líneas de campo, este solo vive en *xy*.



Con solo graficar estas líneas pareciera que el campo esta rotando. Calculamos el rotacional usando la técnica del determinante

$$\nabla x F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2(x+y) \end{bmatrix}$$

El gráfico de $\nabla x F$ es el siguiente



Analicemos un momento el campo obtenido, vea que a medida que nos alejamos del origen los vectores aumentan su módulo, esto significa que si estuviéramos parados en el campo F y se caminara en dirección contraria al origen sentiríamos como el "remolino" de vectores cada vez aumenta su fuerza, así es como uno pudiera analizar el resultado de los rotacionales.

La verdad es que casi nunca se trabajará con las gráficas de los campos o sus rotacionales ya que estos no son siempre fáciles de dibujar, lo que si tendremos es la expresión analítica y su significado.

Ya vemos que pasa cuando se obtiene el rotacional de un campo, pero la pregunta que debemos hacernos ahora es: ¿qué significa que el campo no rote?

Cuando un campo arroja como rotacional el vector $\vec{0}$, significa que este no tiene la tendencia a girar en el espacio, se dice que un campo con esta característica es conservativo, lo interesante de todo esto es que si un campo es conservativo, existe un campo escalar tal que al aplicarle el gradiente dará como resultado el campo vectorial original. Matemáticamente esto es:

$$Si\ \nabla x F = (0,0,0) \ \rightarrow \ \exists\, f \mid \ \nabla f = F(r)$$

Al campo *f* se le conoce como el potencial de F.

Otro punto importante es que si uno se dispone a calcular una integral de línea dentro de un campo vectorial que es conservativo basta con tomar su campo potencial, evaluarlo en el punto final de la trayectoria y restarle el campo (potencial) evaluado en el punto inicial, el resultado será el trabajo necesario para mover una partícula desde ese punto inicial al punto final.

$$W = \int_c F.d\vec{l} = f\left(P_f\right) - f(P_i)$$

Ahora veamos algunos modelos físicos que pueden ser analizados con estos conocimientos.

Un caso de un campo conservativo en la naturaleza es el campo eléctrico irradiado de cuerpos cargados positiva o negativamente. Físicamente se debe haber presentado como

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon.r^2}(\hat{r})$$

Y también se habrá mencionado el potencial eléctrico

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon.r}$$

Por último una de las ecuaciones que los relacionan

$$\int_a^b \vec{E}.d\vec{l} = -(V(b) - V(a))$$

Donde *V* es el campo escalar que cumple $-\nabla V = \vec{E}$

Bien, pues estos no son más que casos particulares de campos vectoriales y potenciales, la duda pudiera ser ¿Dónde está la expresión que depende de *x*, *y* y *z*, a la que operacionalmente estamos tan acostumbrados?

La verdad es que un vector de posición radial respecto al origen se puede escribir como

$$\vec{r} = (x,y,z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

Esta notación es muy usada en física. Si además lo hiciéramos unitario tendríamos

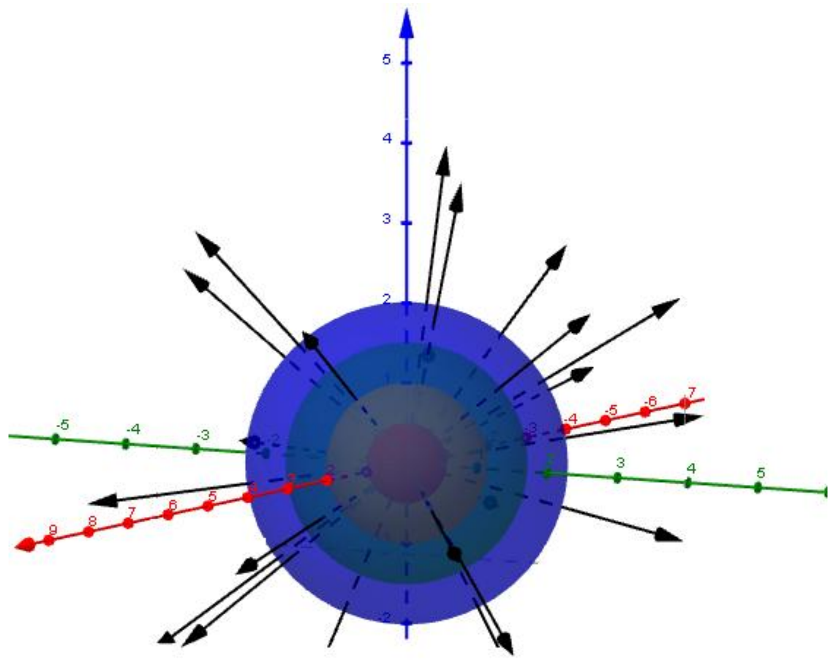
$$\hat{r} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad |r| = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Ahora el campo eléctrico y el potencial pueden lucirnos matemáticamente más familiar

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon.(x^2+y^2+z^2)}(x,y,z), \qquad V(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon.\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Como es más práctico presentar $\vec{E}$ y V en función de una sola variable, usualmente se deja con la expresión de r.

Igualmente estos campos tienen sus gráficas en el espacio, las líneas de campo vectorial de de $\vec{E}$ lucen de manera similar a las de la imagen 1 y las famosas superficies equipotenciales no son más que las superficies de nivel del campo *V(x, y, z)*, que recordemos (si provienen de una carga puntual positiva) se ven de manera esférica.



Ahora la expresión

$$\int_a^b \vec{E}.d\vec{l} = -(V(b) - V(a))$$

El signo menos parece contradecir la teoría de campos conservativos, la verdad es que por tratarse de un campo eléctrico que existe en la vida real, y ya que la ecuación describe un fenómeno de la naturaleza y no es un concepto adstrato (que son los que trata la matemática), entonces el signo menos debe colocarse ya que a medida que me alejo de la fuente de campo , tal vez caminando sobre uno de los vectores (esto es de cierta forma el miembro izquierdo de la ecuación) me daré cuenta que las superficies equipotenciales van perdiendo potencial eléctrico, esto es que va disminuyendo la intensidad del campo escalar. Esto si se quiere ver desde el punto de vista físico, se invita al lector a comprobar matemáticamente (cuando le sea posible) aplicar el gradiente al campo $V(x,y,z)$ y que en efecto $-\nabla V = \vec{E}$.

Ejercicio 1: *Dado el campo vectorial F(r), demuestre que es un campo conservativo y encuentre un potencial para F(r)*

$$F(r) = (2xy - z.sen(xz) + 1, x^2 + z.\cos(zy), -x.sen(xz) + y.\cos(zy))$$

Luego de esto calcule el trabajo total realizado por el campo F para mover una partícula desde el punto a hasta el punto b

$$a = (2,1,\pi/2), \qquad b = (0,2,1)$$

Solución:

Si el campo *F* es conservativo, entonces su rotacional dará cero, esto significa que el campo no rota en el espacio y por lo tanto tiene un campo escalar *f* asociado tal que *gra(f)=F.*

$$F = \begin{bmatrix} A = 2xy - z.sen(xz) + 1 \\ B = x^2 + z.\cos(zy) \\ C = -x.sen(xz) + y.\cos(zy) \end{bmatrix}$$

$$rot(F) = \nabla xF = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy - z.sen(xz) + 1 & x^2 + z.\cos(zy) & -x.sen(xz) + y.\cos(zy) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y}(-x.sen(xz) + y.\cos(zy)) - \dfrac{\partial}{\partial z}(x^2 + z.\cos(zy)) \\ \dfrac{\partial}{\partial z}(2xy - z.sen(xz) + 1) - \dfrac{\partial}{\partial x}(-x.sen(xz) + y.\cos(zy)) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2 + z.\cos(zy)) - \dfrac{\partial}{\partial y}(2xy - z.sen(xz) + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En efecto el campo no rota, así que existe un campo escalar asociado a *F*, este campo cumple lo siguiente

$$grad(f) = \nabla f = F(r)$$

Desde el punto de vista de ecuaciones esto es

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = B$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = C$$

Si **integramos** parcialmente cualquiera de las componentes del campo *F* respecto a *x* (si se trata de *A*), *y* (si se trata de *B*) o *z* (si se trata de *C*) tendremos inmediatamente el campo f solo que debido a la integración aparecerá una constante que no es más que una función que dependerás de las variables respecto a las cuales no se integró, utilizando el hecho de que disponemos de las otras ecuaciones del campo F las cuales no se tocaron para integrar (deben ser 2 ecuaciones las que sobrarán, solo se integra una) podremos encontrar el valor de esa constante/función para terminar de hallar $f(x, y, z)$.

Iniciamos tomando la siguiente ecuación (por elección arbitraria)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A \;\rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - z.sen(xz) + 1$$

Integramos respecto a x

$$f(x,y,z)=\int(2xy-z.sen(xz)+1)\ dx=yx^2+cos(xz)+x+\alpha(y,z)$$

$$f(x,y,z)=yx^2+cos(xz)+x+\alpha(y,z)$$

Si tomo esta expresión (que ya es el campo f pedido solo que está incompleto) y la derivo respecto a y tendremos

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2+\alpha_y(y,z)$$

Pero recordemos que tenemos otra expresión para $\partial f/\partial y$ dada por la definición del campo F, esta es

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2+z.\cos(zy)$$

Si igualamos ambas expresiones tendremos

$$x^2+\alpha_y(y,z)=x^2+z.\cos(zy)\ \ \rightarrow\ \ \alpha_y(y,z)=z.\cos(zy)$$

Integrando ambos lados respecto a y

$$\alpha(y,z)=sen(zy)+\beta(z)$$

De la integración respecto a y sale una constante que es una función que solo depende de z esa es $\beta(z)$

El campo f ya va tomando más forma

$$f(x,y,z)=yx^2+cos(xz)+x+sen(zy)+\beta(z)$$

Pero aun falta encontrar la constante, para esto repetimos el proceso anterior pero respecto a z

$$\frac{\partial f}{\partial z}=y.cos(yz)-x.sen(zx)+\beta'(z)$$

Y por la definición de F

$$\frac{\partial f}{\partial z}=-x.sen(xz)+y.\cos(zy)$$

Igualando

$$y.cos(yz)-x.sen(zx)+\beta'(z)=-x.sen(xz)+y.\cos(zy)\ \ \rightarrow\ \ \beta'(z)=0\ \ \rightarrow\ \ \beta(z)=cte=k$$

Finalmente

$$f(x,y,z)=yx^2+cos(xz)+x+sen(zy)+k, k\in R$$

Para calcular el trabajo recordemos que el campo es conservativo, entonces se cumple

$$W=\int_c F.d\vec{l}=f(b)-f(a)\ \rightarrow\ f(b)=1+sen(2)+k,\qquad f(a)=6+k\ \rightarrow\ W=sen(2)-5$$

Respuesta:

$$f(x,y,z)=yx^2+cos(xz)+x+sen(zy)+k,\qquad k\in R;\quad W=sen(2)-5$$

Ejercicio 2: *Sea F un campo vectorial, determinar los valores de **a** y **b** para que este sea conservativo, una vez encontrados esos valores calcular I.*

$$F(r) = \big((a+b).e^{x}.cos(y) + (b+2)yz, xz - (a+b).e^{x}.sen(y), (a-b).xy + z\big)$$

$$I = \int_{\gamma} F.d\vec{l}, \quad donde\ \gamma(t) = \left((1+t)^{t}, \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right), sen\left(\frac{\pi t^{2}}{2}\right)\right)$$

Solución:

Se sabe que el rotacional del campo debe dar cero, entonces si lo calculamos con las constantes incluidas en él, al final tendremos un sistema de ecuaciones en donde sabemos que las componentes del rotacional deben ser todas cero.

Utilizando una expresión un tanto diferente a la que hemos venido usando para el cálculo de rotacionales tenemos

$$\nabla x F = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\big((a-b).xy+z\big) - \frac{\partial}{\partial z}\big(xz - (a+b).e^{x}.sen(y)\big) \\ \frac{\partial}{\partial z}\big((a+b).e^{x}.cos(y) + (b+2)yz\big) - \frac{\partial}{\partial x}\big((a-b).xy+z\big) \\ \frac{\partial}{\partial x}\big(xz - (a+b).e^{x}.sen(y)\big) - \frac{\partial}{\partial y}\big((a+b).e^{x}.cos(y) + (b+2)yz\big) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x(a-b-1) \\ y(2b-a+2) \\ z(1-b-2) \end{bmatrix}$$

El campo será conservativo solo si se cumple el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a-b-1=0 \\ 2b-a+2=0 \\ 1-b-2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ a-2b=2 \\ b=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ 0-2.(-1)=2 \\ b=-1 \end{cases}$$

Así el campo que como

$$F(r) = \begin{bmatrix} yz - e^{x}.cos(y) \\ xz + e^{x}.sen(y) \\ xy + z \end{bmatrix}$$

Ahora buscamos el campo potencial

$$grad(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} = yz - e^{x}.cos(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = xz + e^{x}.sen(y) \\ \frac{\partial f}{\partial z} = xy + z \end{bmatrix} = F(r)$$

Tomamos la primera componente de F y la integramos respecto a *x*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz - e^{x}.cos(y) \ \rightarrow\ f(x,y,z) = \int yz - e^{x}.cos(y)\, dx \ \rightarrow\ f(x,y,z) = xyz - e^{x}.cos(y) + \alpha(y,z)$$

Derivando respecto a *y*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz + e^{x}.sen(y) + \alpha_y(y,z)$$

Igualando con la expresión en el campo *F*

$$xz + e^{x}.sen(y) + \alpha_y(y,z) = xz + e^{x}.sen(y) \ \rightarrow \ \alpha_y(y,z) = 0 \ \rightarrow \ \alpha(y,z) = \beta(z)$$

Esto es lógico, solo una función que dependa únicamente de *z* al derivarla respecto a *y* dará cero

El campo va quedando de la siguiente manera

$$f(x,y,z) = xyz - e^{x}.cos(y) + \beta(z)$$

Derivando respecto a *z* e igualando con tercera componente del campo

$$xy + \beta'(z) = xy + z \ \rightarrow \ \beta'(z) = z$$

Integrando respecto a *z*

$$\beta(z) = \frac{z^2}{2} + k, \qquad k \in R$$

Finalmente

$$f(x,y,z) = xyz - e^{x}.cos(y) + \frac{z^2}{2} + k, \qquad k \in R$$

Si un campo es conservativo toda integral de línea sobre el campo será igual a tomar el potencial de ese campo, evaluarlo en el punto final de la curva y restarle a ese valor el potencial evaluado en el punto inicial de la curva. El resultado de esto es el trabajo realizado al mover una partícula del punto inicial al punto final.

Ahora tomamos la parametrización de la curva que nos dieron y la evaluamos en los puntos inicial y final, si además consideramos *k=0*.

$$\gamma(t) = \left((1+t)^t, \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right), sen\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)\right) \ \rightarrow \ \begin{cases} \gamma(0) = \left((1+0)^0, \cos(0), sen(0)\right) = (1,1,0) \\ \gamma(1) = \left((1+1)^1, \cos\left(\frac{\pi.1}{2}\right), sen\left(\frac{\pi.1}{2}\right)\right) = (2,0,1) \end{cases}$$

$$f(1,1,0) = 1.1.0 - e^{1}.cos(1) + \frac{0}{2} = -e.cos(1)$$

$$f(2,0,1) = 0 - e^{2}.cos(0) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - e^{2}$$

Así

$$W = \int_{\gamma} F.d\vec{l} = f(2,0,1) - f(1,1,0) = \frac{1}{2} - e^{2} - e.cos(1)$$

Respuesta:

$$f(x,y,z) = xyz - e^{x}.cos(y) + \frac{z^2}{2} + k, \ \ k \in R; \ \ W = \int_{\gamma} F.d\vec{l} = \frac{1}{2} - e^{2} - e.cos(1)$$

Teorema de Gauss.

Ejercicio 1: *Sea F un campo vectorial hallar el flujo de F a través de la superficie S que es frontera del conjunto* Ω.

$$F(r) = (3x^2, 5y^2, 6z), \qquad \Omega = \left\{(x, y, z) \in R^3 \ : \ 3z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad 18z \geq x^2 + y^2\right\}$$

Donde S está orientada con la normal que apunta hacia el interior de Ω.

Solución:

Este ejercicio fue resuelto anteriormente utilizando solo la definición de flujos de campo vectorial, ahora usaremos el teorema de Gauss para resolver exactamente el mismo ejercicio.

El análisis para entender que superficie es la que nos interesa es análogo al método anterior, aun así será recordado.

Para entender que son estas superficies que nos dieron es bueno hacer el estudio por planos que hemos venido practicando. Primero tengamos presente a que se parecen las superficies que nos dieron.

$3z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow (3z)^2 \leq x^2 + y^2 \rightarrow (z)^2 \leq \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2, z > 0$ Tiene similitud con los conos ya estudiados

$18z \geq x^2 + y^2 \rightarrow z \geq \frac{x^2+y^2}{18}$ Parece ser un paraboloide

Lo que puede causar confusión son los valores de 3 (para el extraño cono) y 18 (para el extraño paraboloide) además de los signos de desigualdades.

Para los números 3 y 18, estos no son más que alteraciones en la estructura del cono ordinario, lo que hacen estos valores es hacer que el cono o el paraboloide crezcan más rápido o más lento, si el término divide a la expresión $x^2 + y^2$ (de cualquiera de las dos formas, sea como se escribió para el cono o para el paraboloide) lo que hace es que este crezca más lento, si estuviera multiplicando creciera más rápido.

Las desigualdades lo que se refieren es a zonas del espacio que están limitadas por estas figuras algo así como: estoy en la zona por arriba del cono o estoy por debajo del paraboloide, por dar algunos ejemplos.

Estos análisis pueden ser comprobados tomando $x = 0$.

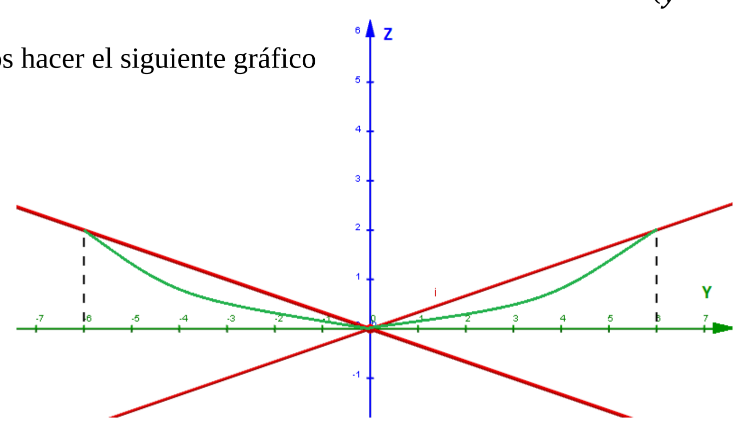
$$3z \leq \sqrt{y^2} \ \rightarrow \ z \leq \pm\frac{y}{3}$$

$$18z \geq y^2 \ \rightarrow \ z \geq \frac{y^2}{18}$$

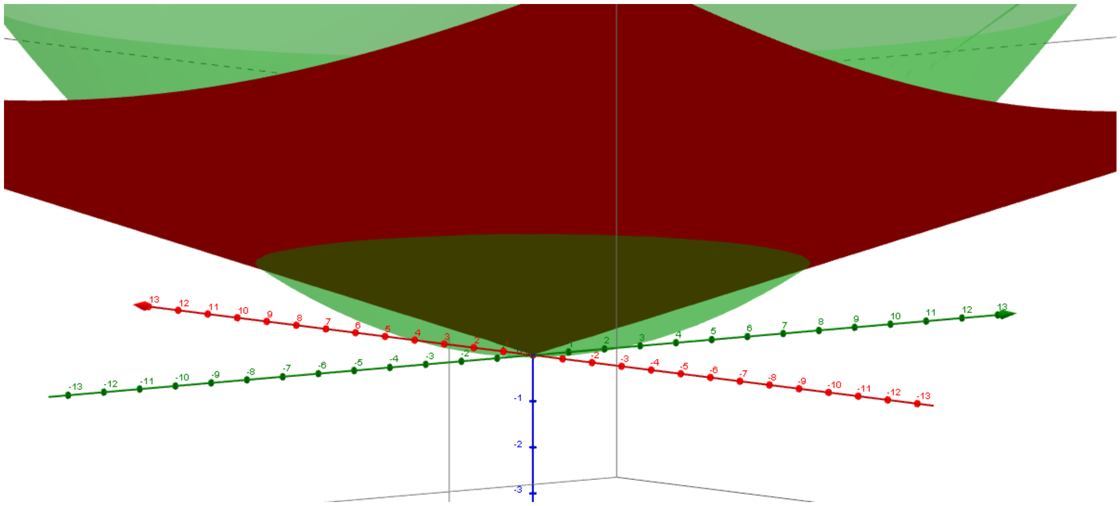
Identificamos así dos rectas y una parábola que viven en *yz* sería conveniente saber donde se interceptan

$$z = \frac{y^2}{18}, \ z = \pm\frac{y}{3} \ \rightarrow \ \frac{y^2}{18} = \pm\frac{y}{3} \ \rightarrow y^2 = \pm 6y \ \rightarrow \ y^2 \pm 6y = 0 \ \rightarrow \ y(y \pm 6) = 0 \ \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 6 \\ y = -6 \end{cases}$$

Con toda esta información podemos hacer el siguiente gráfico



La zona por encima a los trazos de la parábola y por debajo de las rectas rojas (que recuerden son el paraboloide y el cono respectivamente) es la zona de interés, si se realiza el análisis de manera similar para *y=0* (que no es sumamente necesario) se podrá ver el mismo comportamiento en ese plano, con toda esta información se puede hacer la gráfica 3D.



El teorema de Gauss no dice lo siguiente

$$\Pi = \iiint_V div(F)dv = \iiint_V \nabla . F\ dxdydz = \int_S F . d\vec{s}$$

El teorema nos dirá el flujo de campo **SALIENTE** a esta superficie, y nos referimos es a la superficie que encierra el volumen *V*, en este caso no hay que calcular otra cosa (no tendremos que parametrizar nada), solo recordar que al final debemos tomar el resultado y multiplicarlo por un menos, ya que el ejercicio nos pide el flujo entrante y el teorema de Gauss ya sabemos qué tipo de flujo es el que arroja (**SALIENTE).**

Calculamos el rotacional primero

$$\nabla . F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) . (3x^2, 5y^2, 6z) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(5y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(6z) = 6x + 10y + 6$$

Así

$$\Pi = \iiint_V \nabla . F\ dxdydz = \iiint_V (6x + 10y + 6)dxdydz$$

Teniendo claro el concepto de integrar una función dentro de un volumen

$$x = [-6{,}6], \qquad y = \left[-\sqrt{36 - x^2}, \sqrt{36 - x^2}\right], \qquad z = \left[\frac{x^2 + y^2}{18}, \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{3}\right]$$

$$\Pi = \int_{-6}^{6} \int_{-\sqrt{36-x^2}}^{\sqrt{36-x^2}} \int_{\frac{x^2+y^2}{18}}^{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}} (6x + 10y + 6)\ dxdydz$$

Esta integral así tal cual parece complicada por lo que hacemos un cambio de coordenadas conveniente, en este caso al tener repetidas veces el término $x^2 + y^2$ sería bueno utilizar coordenadas cilíndricas.

$$\begin{cases} x = \rho\, cos(\vartheta) \\ y = \rho\, sen(\vartheta) \\ \quad z = z \\ \quad Jb = \rho \end{cases}, \qquad \begin{array}{c} z = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{3} = \dfrac{\sqrt{(\rho\, cos(\vartheta))^2 + (\rho\, sen(\vartheta))^2}}{3} = \dfrac{\rho}{3} \\ z = \dfrac{(\rho\, sen(\vartheta))^2 + (\rho\, sen(\vartheta))^2}{18} = \dfrac{\rho^2}{18} \end{array}$$

Los dominios para las nuevas variables son

$$\theta \in [0,2\pi], \qquad \rho \in [0,6], \qquad z \in \left[\frac{\rho^2}{18}, \frac{\rho}{3}\right]$$

$$\Pi = \int_0^{2\pi} \int_0^{6} \int_{\frac{\rho^2}{18}}^{\frac{\rho}{3}} \rho(6\rho cos(\vartheta) + 10\rho\, sen(\vartheta) + 6)\, dz d\rho d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{6} \left(\frac{\rho^2}{3} - \frac{\rho^3}{18}\right)(6\rho\, cos(\vartheta) + 10\rho sen(\vartheta) + 6)\ d\rho d\vartheta =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} \int_0^{6} \left[3\rho^2 + \rho^3\left(3\, cos(\vartheta) + 5sen(\vartheta) - \frac{1}{2}\right) - \rho^4\left(\frac{cos(\vartheta)}{2} + \frac{5sen(\vartheta)}{6}\right)\right] d\rho d\vartheta =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} \left[\frac{3\rho^3}{3} + \frac{\rho^4}{4}\left(3\, cos(\vartheta) + 5sen(\vartheta) - \frac{1}{2}\right) - \frac{\rho^5}{5}\left(\frac{cos(\vartheta)}{2} + \frac{5sen(\vartheta)}{6}\right)\right]_0^6 d\vartheta =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} \left[6^3 + \frac{6^4}{4}\big(3\, cos(\vartheta) + 5sen(\vartheta)\big) - \frac{6^4}{8} - \frac{6^5}{5}\left(\frac{cos(\vartheta)}{2} + \frac{5sen(\vartheta)}{6}\right)\right] d\vartheta$$

Teniendo en cuenta que las funciones seno y coseno elevadas a una potencia impar e integradas en su período se anulan, resulta más fácil la integración del término que nos quedó

$$\Pi = \frac{2}{3}\left[6^3\vartheta - \frac{6^4\vartheta}{8}\right]_0^{2\pi} = 72\pi$$

Como se nos pidió el flujo de campo entrante, es decir el vector que orienta a la superficie apunta hacia adentro y suma las contribuciones de las “flechas” del campo vectorial que entran, y Gauss nos dio el resultado de justamente lo contrario, entonces tomamos el resultado y lo multiplicamos por un signo menos.

Respuesta:

$$\Pi = -72\pi$$

No es de extrañar, este es el mismo resultado que obtuvimos usando solo la definición de flujo.

Ejercicio 2: *Encontrar el flujo del campo F a través del sólido formado por las superficies S_1, S_2 y S_3*

$$F(r) = (x, y, z), \qquad S_1: \left\{z = 2 + \frac{(x^2 + y^2)}{8}\right\}, \qquad S_2: \{x^2 + (y-4)^2 = 4\},$$
$$S_3: \{x^2 + (y-4)^2 \leq 4 \; si \; z = 1\}$$

Si la superficie está orientada hacia el exterior

Respuesta:

Una vez más este ejercicio ya fue resuelto en la sección de integrales sobre campos vectoriales, pero verificaremos nuestro resultado aplicando ahora el teorema de Gauss.

De nuevo el análisis que debemos realizar para estudiar las superficies y poder graficarlas es el mismo

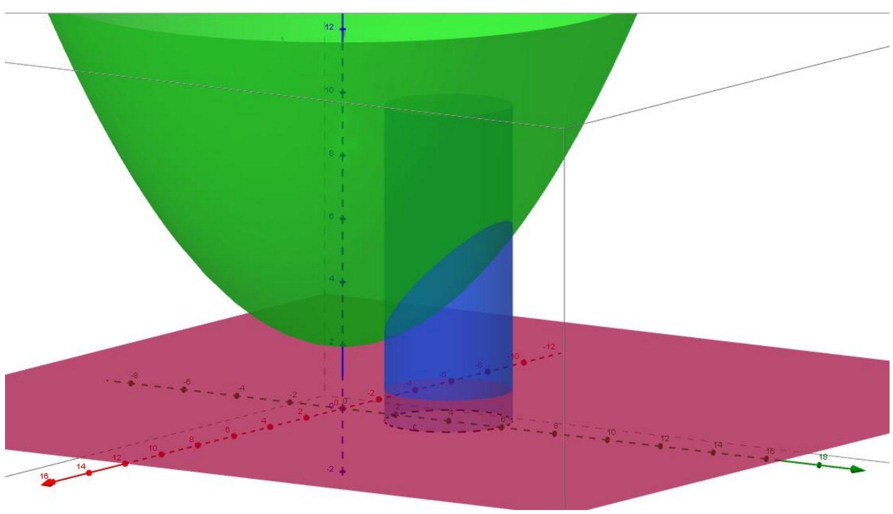
Identificamos las superficies

$z = 2 + \frac{(x^2+y^2)}{8}$: Paraboloide centrado en *(0, 0, 2,)*, crece hacia valores positivos de *z*, crece más lento en un factor de 8.

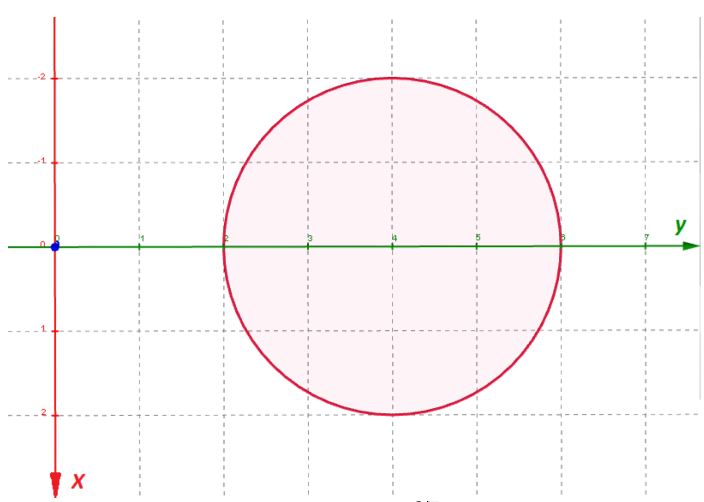
$x^2 + (y-4)^2 = 4$: Cilindro centrado en *(0, 4, 0)* de radio 2 con eje central paralelo al eje *z*.

$x^2 + (y-4)^2 \leq 4 \; si \; z = 1$: Círculo centrado en *(0, 4, 1)* de radio 2 con vector normal paralelo al eje *z*.

Con esta información se tiene suficiente para hacer una gráfica aproximada que nos ayude



En esta imagen el plano morado representa el plano *z=1* donde vive el círculo que "tapa" a nuestro sólido inferiormente.



Esta otra imagen se puede realizar teniendo en cuenta los valores de la circunferencia

Procedemos a calcular el rotacional de campo

$$\nabla . F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3$$

Ya este resultado simplifica mucho las cuentas respecto al primer método.

$$\Pi = \iiint\limits_V \nabla . F \; dxdydz = \iiint\limits_V 3 \; dxdydz$$

Intentar recorrer el volumen con coordenadas cartesianas significa tomar

$$x \in [-2,2], \qquad y \in \left[4 - \sqrt{4 - x^2}, 4 + \sqrt{4 - x^2}\right], \qquad z \in \left[1, 2 + \frac{(x^2 + y^2)}{8}\right]$$

La integral sería

$$\Pi = \int_{-2}^{2} \int_{4-\sqrt{4-x^2}}^{4+\sqrt{4-x^2}} \int_{1}^{2+\frac{(x^2+y^2)}{8}} 3 \; dzdydx$$

Cambiando a coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = \rho \, cos(\vartheta) \\ y - 4 = \rho \, sen(\vartheta) \\ z = z \\ Jb = \rho \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \rho \, cos(\vartheta) \\ y = 4 + \rho \, sen(\vartheta) \\ z = z \\ Jb = \rho \end{cases}, z = 2 + \frac{((\rho \, cos(\vartheta))^2 + (4 + \rho \, sen(\vartheta))^2)}{8} = \frac{\rho^2}{8} + \rho sen(\vartheta) + 4$$

Los valores para las nuevas variables son

$$\vartheta \in [0,2\pi], \qquad \rho \in [0,2], \qquad z \in \left[1, \frac{\rho^2}{8} + \rho sen(\vartheta) + 4\right]$$

Así

$$\Pi = \int_0^{2\pi} \int_0^{2} \int_1^{\frac{\rho^2}{8}+\rho sen(\vartheta)+4} 3\rho \; dzdydx = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{2} \left[\frac{\rho^3}{32} + \frac{\rho^2 sen(\vartheta)}{3} + 3\rho\right] d\rho d\vartheta =$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} \left[\frac{2^4}{32} + \frac{2^3 . sen(\vartheta)}{8} + \frac{3.2^2}{2}\right] d\vartheta = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} d\vartheta + 8 \int_0^{2\pi} sen(\vartheta) d\vartheta + 18 \int_0^{2\pi} d\vartheta = 3\pi + 36\pi = 39\pi$$

Respuesta:

$$\Pi = 39\pi$$

Vea la gran utilidad del teorema de Gauss para el cálculo de flujos de campo vectorial, esta cuenta no solo es más corta que la que se realizó en el método por definición, sino que también es más sencilla.

Ejercicio 3: *Hallar el flujo del campo F(r) a través de la superficie S, si esta tiene vector normal saliente.*

$$S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4^2, \qquad z \in [0,4]\}$$

$$F(r) = (z^2, xy, y)$$

Solución:

La idea es hacer este ejercicio utilizando el teorema de Gauss, más sin embargo será necesario utilizar la definición habitual del flujo, esto se debe a que no nos dieron una superficie cerrada, solo tenemos la parte superior de una esfera ($para\ z \in [0,4]$), y el teorema de Gauss solo es aplicable a superficies cerradas. Entonces aquí el razonamiento está en "tapar" la superficie dada, a esta nueva superficie (que es la que involucra a la semiesfera y la tapa) calcularle el flujo por Gauss y luego por definición calcular el flujo a través de la "tapa" que colocamos (cuidando de mantener el vector normal siempre saliente) y entonces restar al flujo por Gauss el flujo por definición y así tendremos el flujo que queremos, que es solo el que pasa por la esfera; matemáticamente esto es:

$$\iiint_V \nabla . F\, dv = \iint_S F . d\vec{s} + \iint_{S'} F . d\vec{s} \ \rightarrow \ \iint_S F . d\vec{s} = \iiint_V \nabla . F\, dv - \iint_{S'} F . d\vec{s}$$

Donde S' es la superficies que usaremos para tapar a la semiesfera. La pregunta a continuación puede ser: ¿Cómo hago para tapar a *S*?

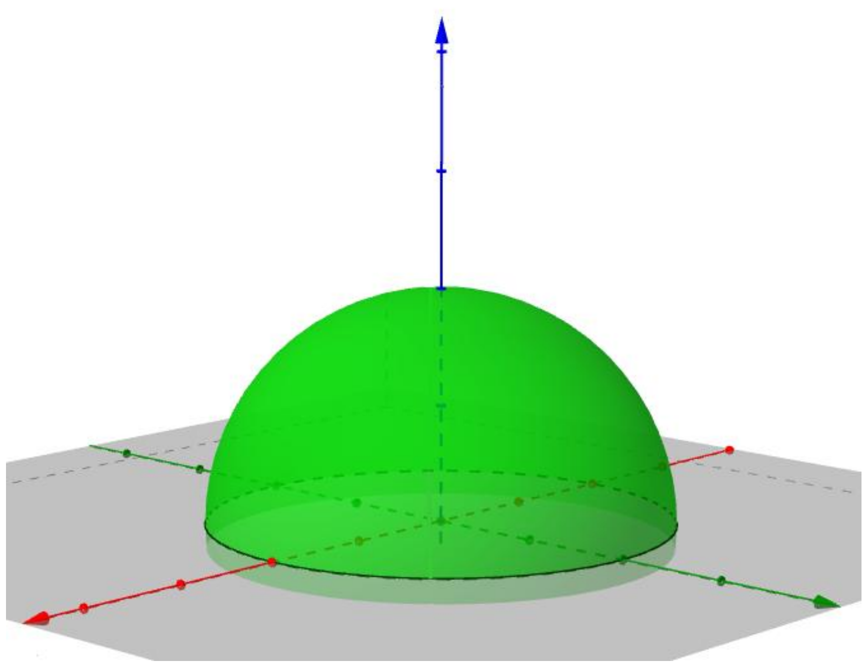
Para esto lo que debemos hacer es definir una nueva superficie de manera tal que calce donde está la abertura de la semiesfera, puede ser cualquier tipo de superficie, con tal de que "tape" **toda** la abertura.

Aquí se usará la siguiente

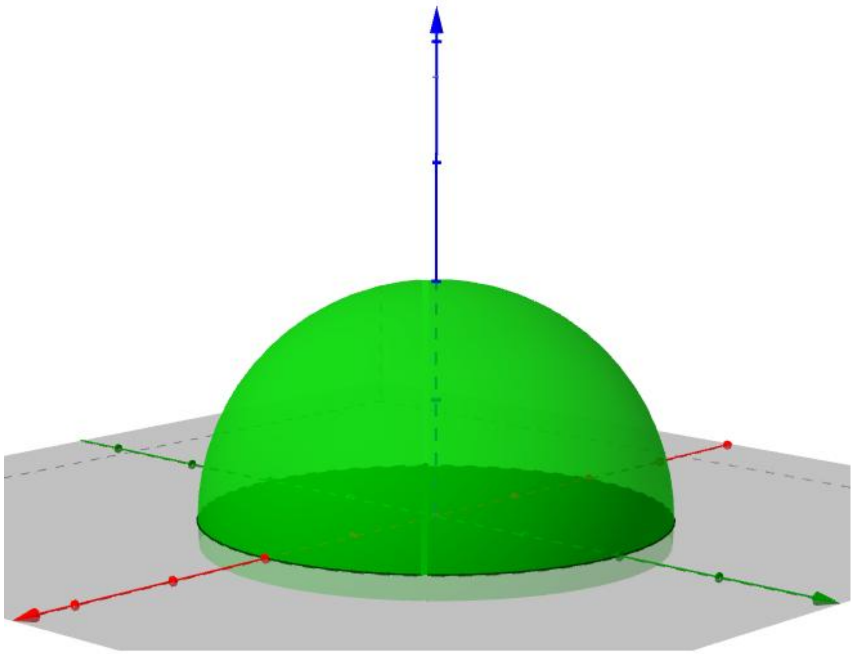
$$S' = \{x^2 + y^2 \le 4^2, \qquad z = 0\}$$

Vea que si en vez del signo ≤ hubiéramos colocado un =, la esfera no se cierra, solo estaríamos colocando un anillo en su borde.

Sin tapar



Después de haber tapado



Comencemos calculando el flujo a través de S'.

Parametrizamos S'

$$\phi = \begin{bmatrix} x = \rho.\cos(\vartheta) \\ y = \rho.sen(\vartheta) \\ z = 0 \end{bmatrix}, \qquad \phi_\rho = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) \\ sen(\vartheta) \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \phi_\vartheta = \begin{bmatrix} -\rho.sen(\vartheta) \\ \rho.\cos(\vartheta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\phi_\rho\, x\, \phi_\vartheta\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos(\vartheta) & sen(\vartheta) & 0 \\ -\rho.sen(\vartheta) & \rho.\cos(\vartheta) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{bmatrix}$$

Como el vector que encontramos es entrante a la superficie *S* no nos servirá para en análisis que necesitamos, recuerde que la superficie tiene vector normal saliente, entonces consideramos este otro

$$\left(\phi_\vartheta x\, \phi_\rho\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho \end{bmatrix}$$

Para recorrer el círculo

$$\vartheta \in [0,2\pi], \qquad \rho \in [0,4]$$

Interceptamos el campo con la parametrización

$$(F \circ \phi) = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho^2.\cos(\vartheta)sen(\vartheta) \\ \rho sen(\vartheta) \end{bmatrix}$$

$$(F \circ \phi).\left(\phi_\vartheta x\, \phi_\rho\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho^2.\cos(\vartheta)sen(\vartheta) \\ \rho.sen(\vartheta) \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho \end{bmatrix} = -\rho^2.sen(\vartheta)$$

Así

$$\int_{S'} F.d\vec{s} = -\int_0^{2\pi}\int_0^4 \rho^2.sen(\vartheta)\,d\rho d\vartheta = -\int_0^{2\pi} sen(\vartheta)\,d\vartheta \int_0^4 \rho^2\,d\rho = 0$$

Ahora pasamos a calcular la integral del teorema de Gauss

$$\nabla.F = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right).(z^2,xy,y) = \frac{\partial}{\partial x}(z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial z}(y) = 0 + x + 0 = x$$

Como queremos recorrer el volumen encerrado por las superficies $S\ y\ S'$

$$x \in [-4,4], \qquad y \in \left[-\sqrt{4^2-x^2},\sqrt{4^2-x^2}\right], \qquad z \in \left[0,\sqrt{4^2-x^2-y^2}\right]$$

Así

$$\iiint_V \nabla.F\,dv = \int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{4^2-x^2}}^{\sqrt{4^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{4^2-x^2-y^2}} x\,dzdydx$$

Cambiando a coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = \rho\,cos(\vartheta)sen(\varphi) \\ y = \rho\,sen(\vartheta)sen(\varphi) \\ z = \rho\,cos(\varphi) \\ Jb = \rho^2.sen(\varphi) \end{cases}$$

Los valores para las nuevas variables son

$$\vartheta \in [0,2\pi], \qquad \varphi \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], \qquad \rho \in [0,4]$$

Interceptamos la divergencia del campo con el cambio de variables y armamos la integral

$$\iiint_V \nabla.F\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4 (\rho\,cos(\vartheta)sen(\varphi))(\rho^2.sen(\varphi))\,d\rho d\varphi d\vartheta = \int_0^{2\pi} cos(\vartheta)d\vartheta.\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(\varphi)d\varphi.\int_0^4 \rho^3 d\rho = 0$$

Respuesta:

$$\Pi = 0$$

Ejercicio 4: *Sea el campo F y la superficie S, calcular la integral de flujo de F a través de S.*

$$F(r) = (e^y z, e^x, e^z xy + 1), \qquad S = \left\{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 - z^2 + 2z = 1, x > 0, y > 0, z \in [1/2,1]\right\}$$

Solución:

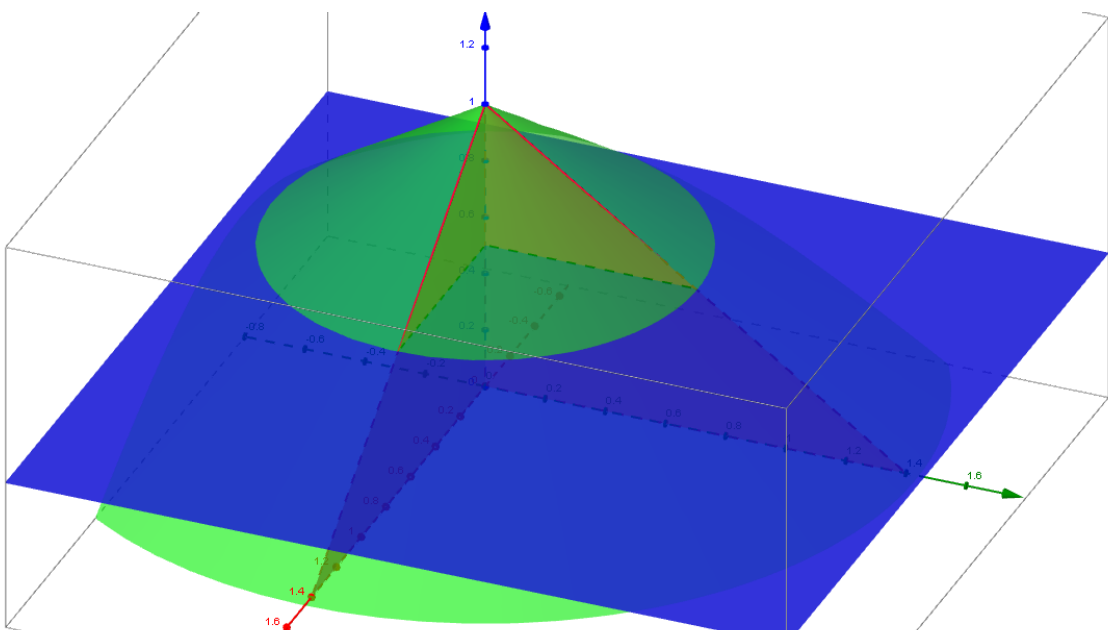
$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 - z^2 + 2z = 1 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z^2 + 2z = 1 \;\rightarrow\; x^2 + y^2 - 2z^2 + 4z = 2$$
$$\rightarrow\; x^2 + y^2 - 2z^2 + 4z - 2 = 0 \;\rightarrow\; x^2 + y^2 - 2(z^2 - 2z + 1) = 0$$
$$\rightarrow x^2 + y^2 - 2(z-1)^2 = 0 \;\rightarrow\; z = 1 \pm \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{2}}$$

$z = 1 \pm \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}}$: Cono centrado en *(0, 0, 1)* que crece más lento en un factor de $\sqrt{2}$

Veamos cómo se interceptan el cono y el plano $z = 1/2$, vea que solo se interceptaran para los valores negativos del cono.

$$z = 1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{2}} \;\rightarrow\; \frac{1}{2} = 1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{2}} \;\rightarrow\; x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Considerando $x > 0,\; y > 0,\; z \in [1/2,1]$ podemos graficar las superficie.



Tenga en cuenta que el plano no forma parte de la superficie dada solo se grafía para indicar que ese es el valor de $z = 1/2$, la superficie dada no es una superficie cerrada es una superficie abierta, si queremos utilizar el teorema de Gauss para hacer el cálculo, entonces tendremos que "tapar" la superficie dada, en este caso véase que este deberá ser un cuarto de circulo ubicado en el primer cuadrante del plano *xy*.

$$S' = \left\{x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2, x > 0, y > 0, z = \frac{1}{2}\right\}$$

Aplicando el teorema de Gauss tenemos

$$\iiint_V \nabla . F\, dv = \iint_S F . d\vec{s} + \iint_{S'} F . d\vec{s} \;\; \rightarrow \;\; \iint_S F . d\vec{s} = \iiint_V \nabla . F\, dv - \iint_{S'} F . d\vec{s}$$

Calculemos primero la integral triple para el teorema de Gauss, empecemos buscando la divergencia del campo

$$\nabla . F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) . (e^y z, e^x, e^z xy + 1) = \frac{\partial}{\partial x}(e^y z) + \frac{\partial}{\partial y}(e^x) + \frac{\partial}{\partial z}(e^z xy + 1) = 0 + 0 + e^z xy = e^z xy$$

Los valores para las variables son

$$x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], \qquad y \in \left[0, \sqrt{\frac{1}{2} - x^2}\right], \qquad z \in \left[\frac{1}{2}, 1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\iiint_V \nabla . F\, dv = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2} - x^2}} \int_{\frac{1}{2}}^{1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}}} e^z xy\, dzdydx$$

Cambiando a coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = \rho\, cos(\vartheta) \\ y = \rho\, sen(\vartheta) \\ \quad z = z \\ \quad Jb = \rho \end{cases}, \qquad \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \rho \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], \qquad z \in \left[\frac{1}{2}, 1 - \frac{\rho}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\nabla . F = e^z \rho^2 cos(\vartheta) sen(\vartheta)$$

La integral nos queda

$$\iiint_V \nabla . F\, dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{\frac{1}{2}}^{1 - \frac{\rho}{\sqrt{2}}} e^z \rho^3 cos(\vartheta) sen(\vartheta) dz d\rho d\vartheta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(2\vartheta) d\vartheta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{\frac{1}{2}}^{1 - \frac{\rho}{\sqrt{2}}} e^z \rho^3\, dz d\rho,$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(2\vartheta) d\vartheta = \frac{1}{2}, \qquad \int_{\frac{1}{2}}^{1 - \frac{\rho}{\sqrt{2}}} e^z \rho^3\, dz = \left(e . \rho^3 . e^{\frac{-\rho}{\sqrt{2}}} - \rho^3 . e^{\frac{1}{2}}\right) \;\rightarrow\; \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(e . \rho^3 . e^{\frac{-\rho}{\sqrt{2}}} - \rho^3 . e^{\frac{1}{2}}\right) d\rho =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(e . \rho^3 . e^{\frac{-\rho}{\sqrt{2}}} - \rho^3 . e^{\frac{1}{2}}\right) d\rho = \frac{e}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho^3 . e^{\frac{-\rho}{\sqrt{2}}} d\rho - \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho^3\, d\rho$$

Ayuda:

$$\int x^3 . a^x dx = \frac{a^x}{ln\,(a)} \left(x^3 - \frac{3x^2}{ln\,(a)} + \frac{6x}{ln^2(a)} - \frac{6}{ln^3(a)}\right)$$

$$\iiint_V \nabla . F\, dv = 12e - \frac{633 e^{\frac{1}{2}}}{32}$$

Ahora busquemos el flujo a través del cuarto de círculo

Parametrizamos S'

$$\phi = \begin{bmatrix} x = \rho.\cos(\vartheta) \\ y = \rho.\operatorname{sen}(\vartheta) \\ z = 1/2 \end{bmatrix}, \qquad \phi_\rho = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) \\ \operatorname{sen}(\vartheta) \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \phi_\vartheta = \begin{bmatrix} -\rho.\operatorname{sen}(\vartheta) \\ \rho.\cos(\vartheta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\phi_\rho \, x \, \phi_\vartheta\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos(\vartheta) & \operatorname{sen}(\vartheta) & 0 \\ -\rho.\operatorname{sen}(\vartheta) & \rho.\cos(\vartheta) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{bmatrix}$$

Como el vector que encontramos es entrante a la superficie S no nos servirá para en análisis que necesitamos, recuerde que la superficie tiene vector normal saliente, entonces consideramos este otro

$$\left(\phi_\vartheta x \, \phi_\rho\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho \end{bmatrix}$$

Para recorrer el cuarto de círculo

$$\vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \rho \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

Interceptamos el campo con la parametrización

$$(F \circ \phi) = \begin{bmatrix} e^{\rho \operatorname{sen}(\vartheta)} z \\ e^{\rho \cos(\vartheta)} \\ e^{\frac{1}{2}} . \rho^2 \cos(\vartheta)\operatorname{sen}(\vartheta) + 1 \end{bmatrix}$$

$$(F \circ \phi).\left(\phi_\vartheta x \, \phi_\rho\right) = \begin{bmatrix} e^{\rho \operatorname{sen}(\vartheta)} z \\ e^{\rho \cos(\vartheta)} \\ e^{\frac{1}{2}} . \rho^2 \cos(\vartheta)\operatorname{sen}(\vartheta) + 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho \end{bmatrix} = -e^{\frac{1}{2}} . \rho^3 \cos(\vartheta)\operatorname{sen}(\vartheta) - \rho$$

$$\iint_{S'} F.d\vec{s} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(-e^{\frac{1}{2}} . \rho^3 \cos(\vartheta)\operatorname{sen}(\vartheta) - \rho\right) d\rho d\vartheta = -\frac{\pi}{8} - \frac{e^{\frac{1}{2}}}{32}$$

$$\iint_S F.d\vec{s} = \iiint_V \nabla.F \, dv - \iint_{S'} F.d\vec{s} = 12e - \frac{633e^{\frac{1}{2}}}{32} - -\frac{\pi}{8} - \frac{e^{\frac{1}{2}}}{32} = \frac{\pi}{8} + 12e - \frac{79\sqrt{e}}{4}$$

Respuesta:

$$\iint_S F.d\vec{s} = \frac{\pi}{8} + 12e - \frac{79\sqrt{e}}{4}$$

Teorema de Stokes

Ejercicio 1: *Sea γ la curva de intersección de las siguientes superfícies*

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

y sea

$$F(r) = (x + z, 2 - 2x, z)$$

Calcular la integral $\oint_\gamma F.d\vec{l}$ en sentido anti horario visto desde el origen.

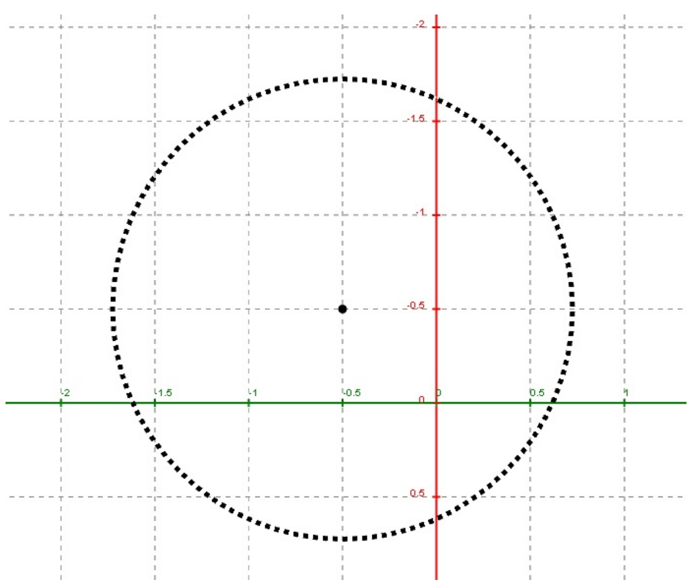
Solución:

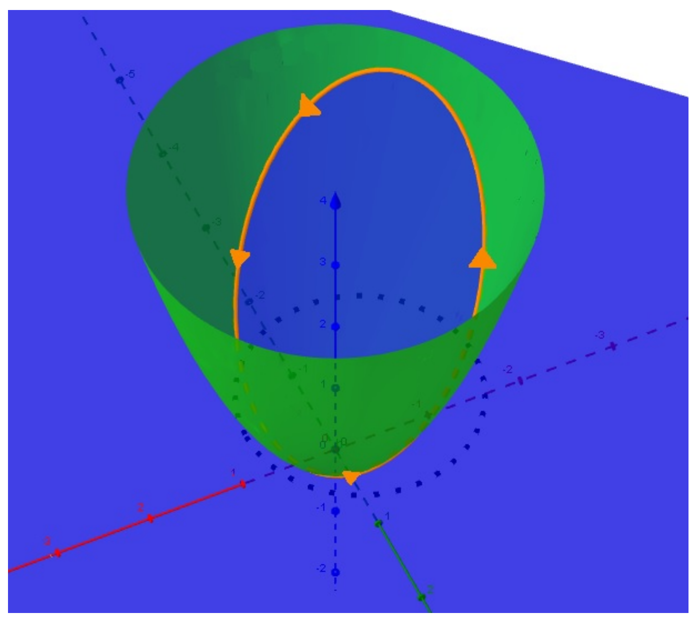
Veamos la intersepción de las las superficies en el plano xy.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ 1 - x - y = z \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 - x - y \Rightarrow x^2 + x + y^2 + y = 1 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} + y^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot y + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

Actualmente nuestras habilidades de graficación ya deberían permitirnos hacer los siguiente dibujos facilmente.





La integral que se nos pide es la integral de línea sobre la curva amarilla de la segunda imagen. Si se desea utilizar el teorema de Stokes lo más simple es parametrizar el plano, aunque téngase presente que ya conocemos el vector normal al plano.

$$\phi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 - x - y \end{bmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n} = (1, 1, 1)$$

Calculemos ahora el rotacional del campo

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x + z & 2 - 2x & z \end{vmatrix} = (0, 1, -2) \Rightarrow \overrightarrow{n} \cdot (\nabla \times F) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = -1$$

Lo que nos falta por descubrir son los intervalos de integración, como hemos utilizado la parametrización canónica entonces integraremos sobre la ”macha” en el plano xy que dejó la intercepción en el espacio de las superficies. No olvidemos que esta zona es

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\leq\frac{3}{2}$$

$$\text{Si } y=-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}\ \Rightarrow x+\frac{1}{2}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\ \Rightarrow x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\text{Si despejo } y\Rightarrow\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\ \Rightarrow y=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{3}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

Armando la integral pedida

$$\oint_\gamma F.d\vec{l}=\int_{\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}^{\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}\int_{\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\right)}^{\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\right)}(-1)dydx$$

No hay que hacer ningún cálculo, ni cambio de variables ni nada, solo recordar que ésta integral no es más que el área del círcuo formado en el plan xy debido a la intercepci”on de las superficies, osea la ”mancha”.

$$Area_{\text{círculo}}=\pi r^2$$

$$\oint_\gamma F.d\vec{l}=\int_{\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}^{\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}\int_{\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\right)}^{\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\right)}(-1)dydx=-\frac{3\pi}{2}$$

Respuesta:

$$\oint_\gamma F.d\vec{l}=-\frac{3\pi}{2}$$

Ejercicio 2: *Calcular la integral I donde c es recorrida en sentido anti horario*

$$I = \oint_c (y-1)dx + z^2dy + ydz \qquad c: \begin{cases} x^2+y^2 = \frac{z^2}{2} \\ z = y+1 \end{cases} \qquad Si \;\; z>0$$

Solución:

$$x^2+y^2 = \frac{z^2}{2} \;\Rightarrow\; z^2 = 2\left(x^2+y^2\right) \;\Rightarrow\; z = \pm\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} : \text{Cono que crece más rápido en un factor de } \sqrt{2}$$

$$z = y+1 \;\Rightarrow\; y-z = -1 \text{ :Plano con vector normal } \vec{n} = (0,1,-1) \text{ o } \vec{n} = (0,-1,1)$$

Para cumplir con la regla de la mano derecha y teniendo en cuenta como es recorrida la curva tomamos el vector $\vec{n} = (0,-1,1)$

Veamos como luce la intercepción de estas dos superficies en el plano xy.

$$\begin{cases} 2(x^2+y^2) = z^2 \\ y+1 = z \end{cases} \Rightarrow 2(x^2+y^2) = (y+1)^2 \;\Rightarrow\; 2x^2+2y^2 = y^2+2y+1 \;\Rightarrow$$

$$2x^2+y^2-2y+1-1 = 1 \;\Rightarrow\; 2x^2+(y-1)^2 = 2$$

Esta es una elípse, que suele ser un poco más complicada de analizar que una circunferencia, para ver los puntos de corte tomemos los valores correspondientes para cada variable donde estas se anulan en la expresión algebraica de la elípse. Solo se consideran valore de $z \geq 0$.

$$2x^2+(y-1)^2 = 2, y = 1 \;\Rightarrow\; 2x^2 = 2 \;\Rightarrow x = \pm 1$$

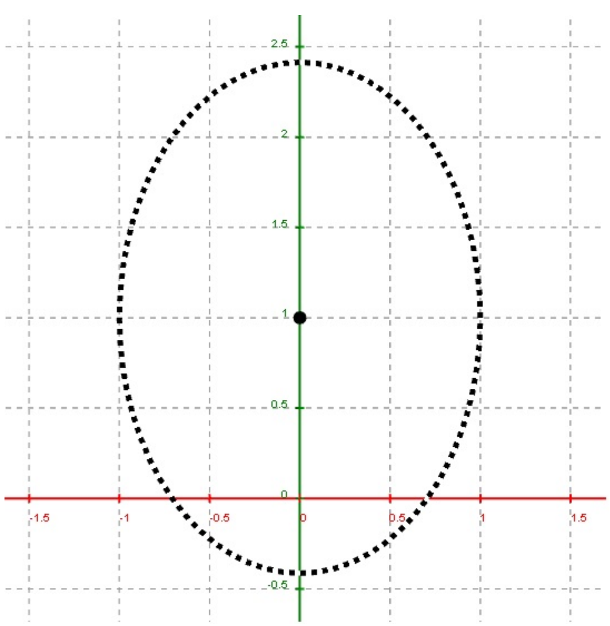
$$2x^2+(y-1)^2 = 2, x = 0 \;\Rightarrow\; (y-1)^2 = 2 \;\Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{2}$$

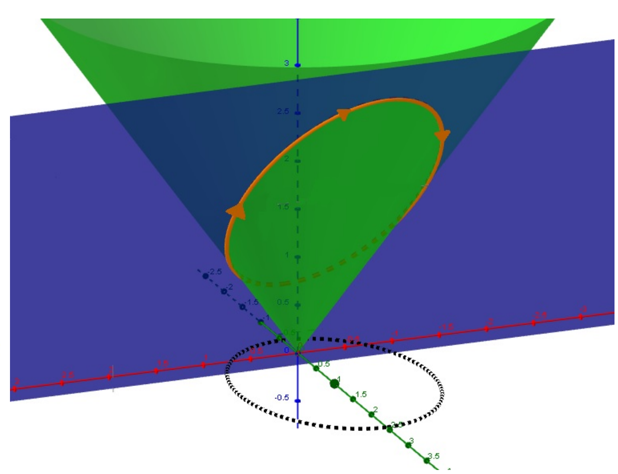
Si sustituimos los valores "más negativo" y "más positivo" de y en el plano, en la expresión del cono, tendremos las alturas menor y mayor para las cuales el cono se corta con el plano, recordando claro que estos puntos de corte estarán sobre el eje y si tomamos $x=0$, este paso no es netamente necesario, pero es recomendable si se quiere hacer una mejor gráfica de las superficies.

$$z = \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}, x=0, y=1-\sqrt{2} \;\Rightarrow\; z = \sqrt{2}\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} \;\Rightarrow\; z = \sqrt{2}\left|1-\sqrt{2}\right| \approx 0{,}58$$

$$z = \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}, x=0, y=1+\sqrt{2} \;\Rightarrow\; z = \sqrt{2}\sqrt{(1+\sqrt{2})^2} \;\Rightarrow\; z = \sqrt{2}(1+\sqrt{2} \approx 3{,}41$$

Pasamos a hacer las gráficas





Recuerde, el eje rojo es el eje x el eje verde es el eje y y las curva en amarillo es la curva c. Al igual que en el ejercicio anterior la superficie más simple que tiene a la curva como frontera es el plano en cuestión, tomamos este y lo parametrizamos.

$$\phi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ y+1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{n} = (0,-1,1)$$

Calculamos el rotacional del campo

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z-1 & z^2 & y \end{vmatrix} = (1-2z, 0, -1)$$

Interceptamos el rotacional con la parametrización

$$(\nabla \times F) \circ \phi = (-2y, 0, -1)$$

Los siguientes intervalos de integración, se eligieron ya que permitirán una mejor resolución de la integral, sin la necesidad de hacer cambios de variable.

$$x \in [-1,1], \quad y \in \left[1-\sqrt{2-2x^2}, 1+\sqrt{2-2x^2}\right]$$

Armando la integral

$$\oint_c F.d\vec{l} = \int_{-1}^{1} \int_{1-\sqrt{2-2x^2}}^{1+\sqrt{2-2x^2}} \begin{bmatrix} -2y \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} dydx = -\int_{-1}^{1} \int_{1-\sqrt{2-2x^2}}^{1+\sqrt{2-2x^2}} dydx = -\int_{-1}^{1} \left[1+\sqrt{2-2x^2} - \left(1-\sqrt{2-2x^2}\right)\right] dx =$$

$$= -2\int_{-1}^{1} \sqrt{2-2x^2}dx = -2\sqrt{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$$

$$\text{Resolvamos } \int \sqrt{1-x^2}dx, \begin{array}{c} x = sin(\theta) \\ dx = cos(\theta)d\theta \end{array} \Rightarrow \int \sqrt{1-sen^2(\theta)}\cos(\theta)d\theta = \int cos^2(\theta)d\theta =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos(2\theta)\right) d\theta = \frac{1}{2}\int d\theta + \frac{1}{2}\int cos(2\theta)d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{sen(2\theta)}{4} = \frac{\theta}{2} + \frac{sen(\theta)cos(\theta)}{2}, \ \theta = sen^{-1}(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{sen^{-1}(x)}{2} + \frac{1}{2}sen\left(sen^{-1}(x)\right)\sqrt{1-sen^2\left(sen^{-1}(x)\right)} = \frac{sen^{-1}(x)}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} = \frac{1}{2}\left(sen^{-1}(x) + x\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\text{Retomando el ejercicio original } \oint_c F.d\vec{l} = -\sqrt{2}\left[sen^{-1}(x) + x\sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{1} = -\sqrt{2}\pi$$

Respuesta:

$$\oint_c F.d\vec{l} = -\sqrt{2}\pi$$

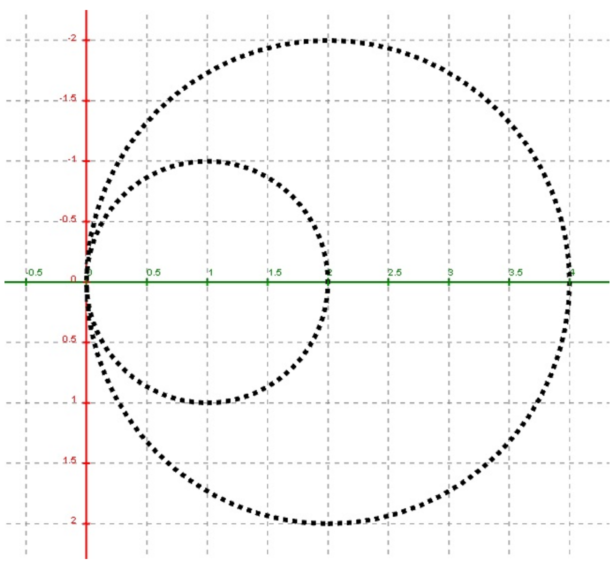
Ejercicio 3: *Calcular la siguiente integral de línea* $\oint_c F.d\vec{l}$ *si la curva es recorrida en sentido anti horario.*

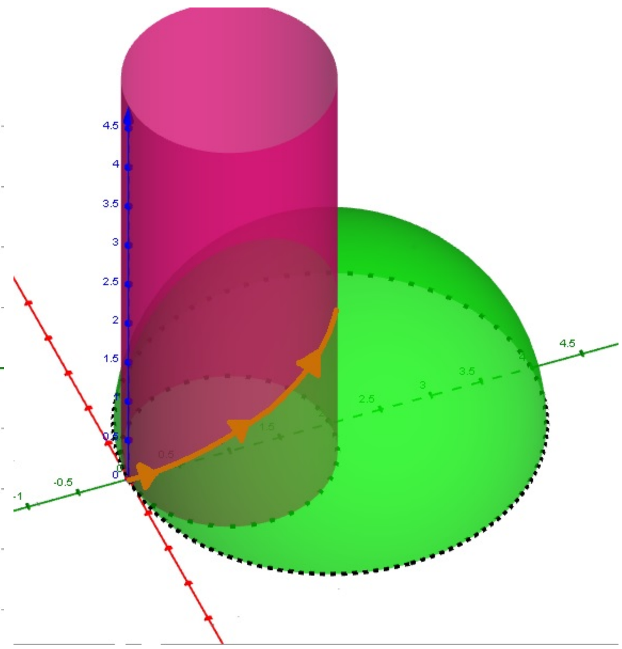
$$F(r) = \left(y^2+z^2, x^2+z^2, x^2+y^2\right), \qquad c = \{x^2+y^2+z^2 = 4y\} \cap \{x^2+y^2 = 2y\},\ z \geq 0$$

Solución:

$$x^2+y^2+z^2 = 4y \;\Rightarrow\; x^2+y^2-2\cdot 2y+4+z^2 = 4 \;\Rightarrow\; x^2+(y-2)^2+z^2 = 4$$
$$x^2+y^2 = 2y \;\Rightarrow\; x^2+y^2-2y+1 = 1 \;\Rightarrow\; x^2+(y-1)^2 = 1$$

Graficando todo esto





Si se quiere emplear el teorema de Stokes utilizamos entonces la parte de la esfera interna al cilindro, que como se ve tiene como frontera a la curva c. Por la comodidad para la integración utilizaremos coordenadas canónicas, recuerde que se parametrizará la esfera, el cilindro solo dictará la región de integración.

$$\phi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \sqrt{4-x^2-(y-2)^2} \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \phi_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-(y-2)^2}} \end{bmatrix},\ \phi_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-(y-2)}{\sqrt{4-x^{-}(y-2)^2}} \end{bmatrix}$$

$$\phi_x \times \phi_y = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-(y-2)^2}} \\ 0 & 1 & \frac{2-y}{\sqrt{4-x^2-(y-2)^2}} \end{vmatrix} = \left[\frac{x}{\sqrt{4-x^2-(y-2)^2}}, \frac{y-2}{\sqrt{4-x^2-(y-2)^2}}, 1\right]$$

Calculamos el rotacional del campo

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y^2+z^2 & x^2+z^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix} = 2(y-z, z-x, x-y)$$

Ahora interceptamos el rotacional con la parametrización

$$(\nabla \times F)\circ\phi = 2\begin{bmatrix} y-\sqrt{4-x^2-(y-2)^2} \\ \sqrt{4-x^2-(y-2)^2}-x \\ x-y \end{bmatrix}$$

Hacemos el producto punto

$$[(\nabla \times F) \circ \phi] \cdot (\phi_x \times \phi_y) = 2 \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{4-x^2-(y-2)^2}} \\ \frac{y-2}{\sqrt{4-x^2-(y-2)^2}} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y - \sqrt{4-x^2-(y-2)^2} \\ \sqrt{4-x^2-(y-2)^2} - x \\ x - y \end{bmatrix} = \frac{4x}{\sqrt{4-x^2-(y-2)^2}} - 4$$

Para los intervalos de integración tenemos dos opciones

$$x \in [-1,1],\ y \in \left[1-\sqrt{1-x^2}, 1+\sqrt{1-x^2}\right] \quad \text{ó} \quad x \in \left[-\sqrt{1-(y-1)^2}, \sqrt{1-(y-1)^2}\right],\ y \in [0,2]$$

Por conveniencia para el cálculo de la integral se tomarán los segundos intervalos (Ojo: esta elección no es nada trivial, se basa es tomar los primeros intervalos y percatarse que no llevan a cálculos prácticos o sencillos).

$$\oint_c F.d\vec{l} = \int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} \left[\frac{4x}{\sqrt{4-x^2-(y-2)^2}} - 4\right] dxdy =$$

$$= 4\int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} \frac{xdxdy}{\sqrt{4-x^2-(y-2)^2}} - 4\int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} dxdy = 4\int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} \frac{xdxdy}{\sqrt{4-x^2-(y-2)^2}} - 4\pi$$

Resolvemos $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2-(y-2)^2}}$, $\quad \begin{array}{c} 4-x^2-(y-2)^2 = t \\ -2xdx = dt \\ xdx = \frac{-dt}{2} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{-1}{2}\displaystyle\int t^{\frac{-1}{2}} = -t^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{4-x^2-(y-2)^2} \Rightarrow$

$$\left[-\sqrt{4-x^2-(y-2)^2}\right]_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} = 0$$

Respuesta:

$$\oint_c F.d\vec{l} = -4\pi$$

Ejercicio 4: *Sea* $\vec{F} : R^3 \to R^3$ *de clase* C^1 *en* R^3 *y tal que* $rot(F) = (y^2, z, x^2)$.

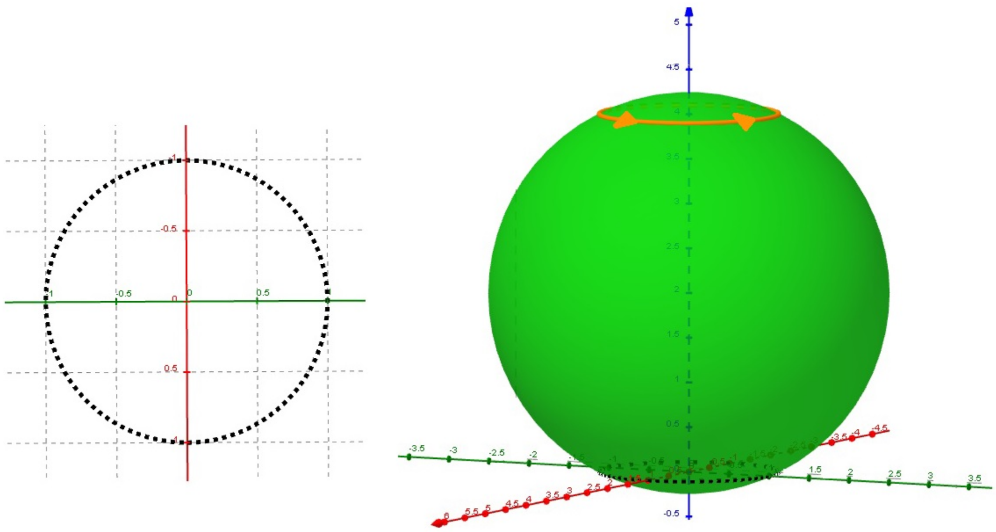
$$Y\ sea \gamma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 4z,\ z = 4\}.$$

Denotemos $\gamma \uparrow$ *a la curva* γ *recorrida en sentido antihorario cuando se mira* γ *desde el eje z,* $z > 0$*, calcular* $\oint_{\gamma\uparrow} F.d\vec{l}$

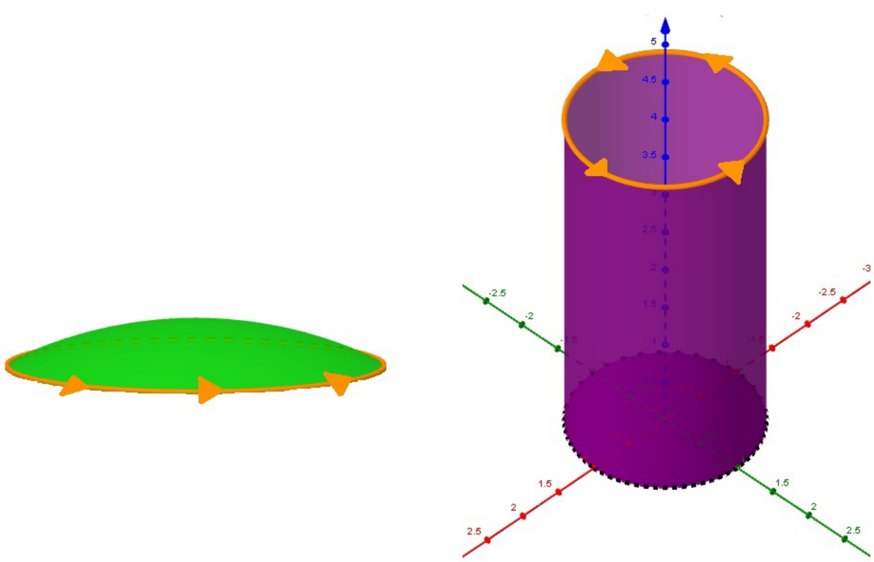
Solución:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 4z \ \Rightarrow\ x^2 + y^2 + z^2 - 2 \cdot 2z + 4 = 1 + 4 \ \Rightarrow\ x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 5$$
$$\text{Si } z = 0 \ \Rightarrow\ x^2 + y^2 = 1,\ \text{Si } z = 4 \ \Rightarrow\ x^2 + y^2 = 1$$

Graficamos



Solo para verificar el teorema y así poder terminar de entenderlo, tomaremos dos superficies que tienen como frontera a la curva γ y aplicaremos la teoría a ambas, las superficies serán las siguientes:



Superficie 1: Porción de esfera limitada por γ.
Parametrizamos la porción de esfera.

$$\phi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 2+\sqrt{5-x^{-}y^{5}} \end{bmatrix} \Rightarrow \phi_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-x}{\sqrt{5-x^2-y^2}} \end{bmatrix},\ \phi_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-y}{\sqrt{5-x^{-}y^2}} \end{bmatrix}$$

$$\phi_x \times \phi_y = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \frac{-x}{\sqrt{5-x^{-}y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{-y}{\sqrt{5-x^2-y^2}} \end{vmatrix} = \left[\frac{x}{\sqrt{5-x^{-}y^2}}, \frac{y}{\sqrt{5-x^2-y^2}}, 1\right]$$

Interceptamos el rotacional con la parametrización.

$$rot(F)\circ\phi = \left[y^2, 2+\sqrt{5-x^2-y^2}, x^2\right]$$

$$(rot(F)\circ\phi)\cdot(\phi_x\times\phi_y) = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{5-x^{-}y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{5-x^{-}y^2}} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y^2 \\ 2+\sqrt{5-x^2+y^2} \\ x^2 \end{bmatrix} = \frac{xy^2+2y}{\sqrt{5-x^2-y^2}} + y + x^2$$

$$\oint_{\gamma\uparrow} F.d\vec{l} = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[\frac{xy^2+2y}{\sqrt{5-x^2-y^2}} + y + x^2\right] dydx,\ \begin{matrix} x=\rho cos(\theta) \\ y=\rho sen(\theta) \\ Jb=\rho \end{matrix} \quad \begin{matrix} \theta\in[0,2\pi] \\ \rho\in[0,1] \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\left[\frac{\rho^3 cos(\theta)sen^2(\theta)+2\rho sen(\theta)}{\sqrt{5-\rho^2}} + \rho sen(\theta) + \rho^2 cos^2(\theta)\right] d\rho d\theta,$$

Sea $a = cos(\theta)sen^2(\theta),\ b = sen(\theta),\ c = cos^2(\theta),$ Solo para la integral indefinida de ρ

$$a\int \frac{\rho^4 d\rho}{\sqrt{5-\rho^2}} + 2b\int \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{5-\rho^2}} + \frac{b\rho^3}{3} + \frac{c\rho^4}{4}$$

Llegados a este punto deberíamos descartar seguir utilizando esta parametrización, la primera integral es muy complicada de resolver (más no imposible) y seguir por este camino no sería conveniente de manera práctica, más sin embargo se prometió la verificación del teorema, mostraremos solo el resultado de las integrales, más no la resolución.

$$a\left[\frac{75sen^{-1}\left(\frac{\rho}{\sqrt{5}}\right)}{8} - \frac{\rho\sqrt{5-\rho^2}(2\rho^2+15)}{8}\right] - 2b\sqrt{5-\rho^2} + \frac{b\rho^3}{3} + \frac{c\rho^4}{4}$$

Evaluando entre 0 y 1.

$$a\left[\frac{1}{8}\left(75ctan^{-1}(2)-34\right)\right] + b\left(\frac{1}{3} - 2\sqrt{2} + 4\right) + \frac{c}{4} = c_1 cos(\theta)sen^2(\theta) + c_2 sen(\theta) + \frac{cos^2(\theta)}{4} \Rightarrow$$

$$\oint_{\gamma\uparrow} F.d\vec{l} = c_1\int_0^{2\pi} cos(\theta)sen^2(\theta) + c_2\int_0^{2\pi} sen(\theta) + \int_0^{2\pi}\frac{cos^2(\theta)}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Superficie 2: Vaso cilíndrico con γ como borde. Parametrizamos el borde externo del cilindro

$$\phi = \begin{bmatrix} cos(\theta) \\ sen(\theta) \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \phi_\theta = \begin{bmatrix} -sen(\theta) \\ cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix},\ \phi_z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \phi_\theta\times\phi_z = \begin{bmatrix} cos(\theta) \\ sen(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$rot(F)\circ\phi = \left(sen^2(\theta), z, cos^2(\theta)\right)$$

$$(\phi_\theta \times \phi_z) \cdot (rot(F) \circ \phi) = \begin{bmatrix} cos(\theta) \\ sen(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} sen^2(\theta) \\ z \\ cos^2(\theta) \end{bmatrix} = cos(\theta)sen^3(\theta) + zsen(\theta)$$

$$\theta \in [0, 2\pi], \; z \in [0, 4]$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^4 cos(\theta)sen^3(\theta) + zsen(\theta)dzd\theta = 0$$

Entonces todo se remite a calcular la integral sobre lo que en nuestro caso sería el "fondo del vaso" recuerde que para que la curva sea recorrida de la manera pedida, el vector normal de la superficie debe apuntar (en este caso) hacia "arriba" para $z > 0$. Parametrizamos el círculo en el plano xy.

$$E = \begin{bmatrix} \rho cos(\theta) \\ \rho sen(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; E_\rho = \begin{bmatrix} cos(\theta) \\ sen(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \; E_\theta = \begin{bmatrix} -\rho sen(\theta) \\ \rho coss(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; E_\rho \times E_\theta = (0, 0, \rho)$$

$$rot(F) \circ E = \left(\rho^2 cos^2(\theta), 0, \rho^2 sen^2(\theta)\right)$$

$$(rot(F) \circ E) \cdot (E_\rho \times E_\theta) = \begin{bmatrix} \rho^2 cos^2(\theta) \\ 0 \\ \rho^2 sen^2(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{bmatrix} = \rho^3 cos^2(\theta)$$

$$\theta \in [0, 2\pi], \; \rho \in [0, 1]$$

Entonces

$$\oint_{\gamma\uparrow} F.d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^3 cos^2(\theta) = \int_0^{2\pi} cos^2(\theta)d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{4}$$

Respuesta:

$$\oint_{\gamma\uparrow} F.d\vec{l} = \frac{\pi}{4}$$

Este ejercicio nos indica lo importante que es elegir una superficie conveniente para los cálculos, mientras que la superficie 1 fue larga y tediosa de trabajar, la superficie 2 permitió resolver el ejercicio rápido, mas aun la superficie más simple de utilizar ni siquiera la tratamos, esta era simplemente el plano $z = 4$ limitado por la curva c. Moraleja: cualquier superficie que tenga como frontera la curva c funciona.

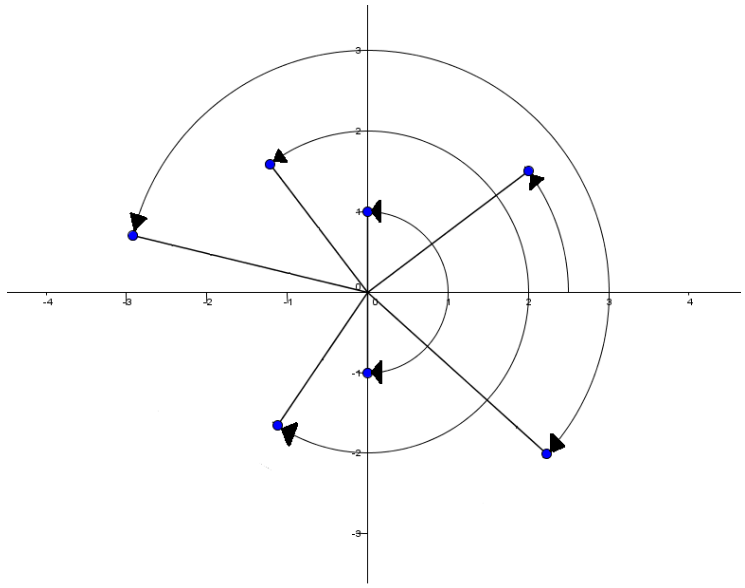
Fórmula de Môivre.

Argumento de un número complejo

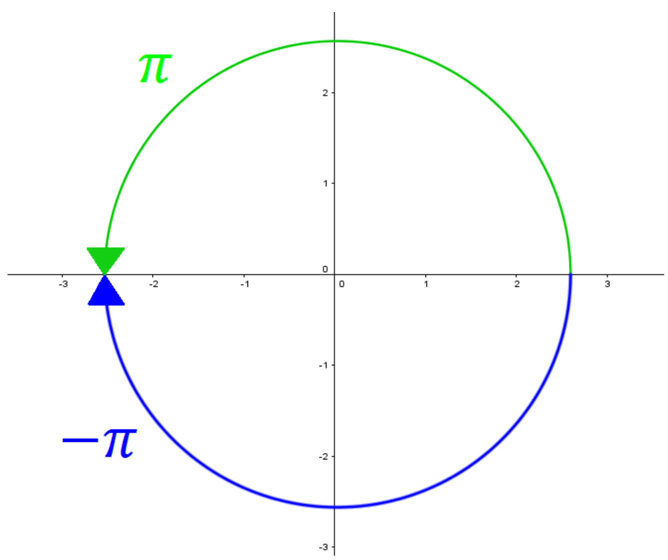
Tal parece que este puede ser un tema un tanto complicado para los que se enfrentan al cálculo de variable compleja, más sin embargo es un tema base, que debe dominarse muy bien si se quiere avanzar en este estudio, la siguiente es una explicación sencilla y corta, de lo que esto es.

El argumento de un número complejo no es otra cosa que un ángulo, como todo ángulo, debe ser medido desde una referencia, en nuestro caso y como ha sido siempre, la referencia es el eje real positivo, cada vez se mida un argumento se medirá desde el eje real positivo. El otro punto importante es que todos estos ángulo deben caer dentro de un intervalo específico, este intervalo es $[-\pi,\pi)$, esto es lo que puede confundir un poco al momento de hacer los cálculos, ya que con esta restricción no se podrá calcular el ángulo a como estamos acostumbrados, donde la abertura del mismo puede dar una vuelta completa.

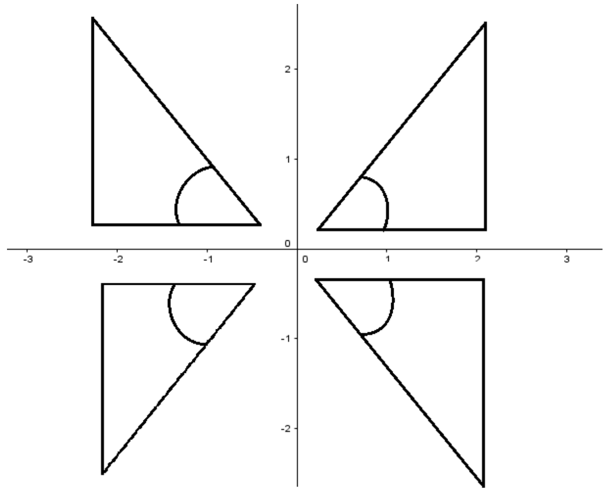
Ahora tendremos ángulos negativos y positivos, los ángulos positivos estarán en los cuadrantes I y II, mientras que los ángulos negativos estarán en los cuadrantes III y IV, esta información puede ser confusa, la siguiente imagen ayudará a su comprensión.



En esta imagen los puntos azules son los números complejos, puestos sobre el plano complejo, las flechas curvas son las aberturas de los ángulos que representan el argumento y las líneas rectas representan el módulo del número. Vea como las flechas curvas parten todas del eje real positivo y van hacia donde están los números, y ninguna de esta llega a cortar el eje real negativo, así deben medirse los argumentos. Por último para pasar a los cálculos analíticos tengamos presente lo siguiente.



El ángulo de color verde como bien se indica vale π mientras que el ángulo azul vale $-\pi$, siendo esto así podemos pasar a los cálculos analíticos, tenga presente que lo que siempre podremos calcular sin importar lo extraño que sea el número complejo será la tan^{-1} de los módulos de las componentes del número. Pensemos en los diferentes triángulos que nos podemos encontrar en nuestros cálculos.



De ahora en adelante cada vez que tengamos que calcular una tangente inversa lo haremos con los valores positivos de las partes real e imaginaria del número dado como si simplemente se tratara de triángulos en el plano, así como en la figura de arriba. Finalmente aquí tenemos las fórmulas para los cálculos analíticos.

$$\arg(a+ib)=\begin{cases} tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right), & \textit{Primer cuadrante} \\ \pi - tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right), & \textit{Segundo cuadante} \\ -tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right), & \textit{Cuarto cuadrante} \\ -\pi + tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right), & \textit{Tercer cuadrante} \end{cases}$$

Para terminar con el análisis hablemos que pasa si los números están sobre uno de los ejes.

Eje x positivo $\rightarrow$ $\arg(z)=0$

Eje x negativo $\rightarrow$ $\arg(z)=-\pi$ (recuerde que no puede ser π debido a que los argumentos caen en $[-\pi,\pi)$

Eje y positivo $\rightarrow$ $\arg(z)=\frac{\pi}{2}$

Eje y negativo $\rightarrow$ $\arg(z)=-\frac{\pi}{2}$

Todos estos resultados son igualmente comprobables utilizando la definición anterior. Los ejemplos para esta nota teórica están contenidos en los siguientes cuatro ejercicios.

Ejercicio 1: *Calcular las raíces del siguiente número complejo*

$$z^4 - i = 0$$

Solución:

Primero se despeja la z y luego se define un nuevo número complejo llamado w tal que elevado a una cierta potencia (en este caso $1/4$) sea igual a z. Estos ejercicios de realizan así.

$$z^4 = i \rightarrow z^4 = i = w \rightarrow z = i^{\frac{1}{4}} = w^{\frac{1}{4}}$$

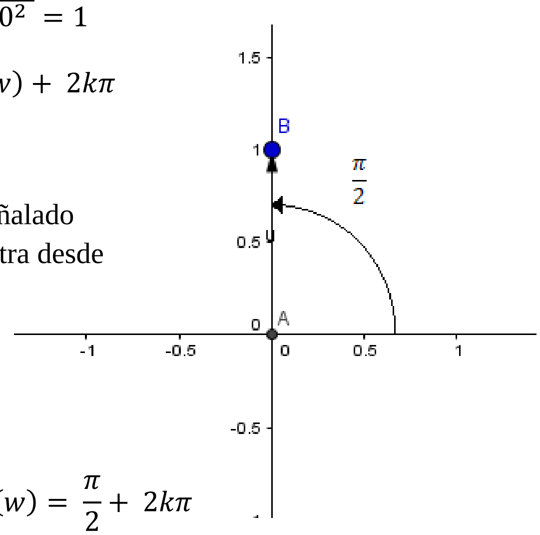
Expreso i en su forma polar:

$$|w| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

$$Arg(w) = \arg(w) + 2k\pi$$

Para encontrar $\arg(w)$veamos la representación gráfica de i

El número complejo está representado por el punto azul y es señalado por un vector, la flecha curva es el ángulo del argumento, muestra desde donde debe ser medido, siempre se parte del eje real positivo.



$$\arg(w) = \frac{\pi}{2} \rightarrow Arg(w) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$w = i = cis\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

Ahora para nuestros fines:

$$w^{\frac{1}{4}} = 1^{\frac{1}{4}}.cis\left[\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right).\frac{1}{4}\right] = cis\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right)$$

La siguiente pregunta es ¿Qué valores deberá tomar k?, se sabe que k permite ir al argumento de rama en rama, para esto k $\in Z$. En nuestro caso los valores de k coinciden con el número de raíces buscadas para el número z (contando a partir de cero), en este caso k = 0, 1, 2, 3.

$$z_{k=0} = cis\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i.sin\left(\frac{\pi}{8}\right), \frac{\pi}{8} \rightarrow \frac{\pi}{8}.\frac{180°}{\pi} = 22{,}5°$$

$$z_1 = cis\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) = cis\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + i.sin\left(\frac{5\pi}{8}\right), \frac{5\pi}{8} \rightarrow \frac{5\pi}{8}.\frac{180°}{\pi} = 112{,}5°$$

$$z_2 = cis\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right) = cis\left(\frac{9\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i.sin\left(\frac{9\pi}{8}\right), \frac{9\pi}{8} \rightarrow \frac{9\pi}{8}.\frac{180°}{\pi} = 202{,}5°$$

$$z_3 = cis\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2}\right) = cis\left(\frac{13\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{13\pi}{8}\right) + i.sin\left(\frac{13\pi}{8}\right), \frac{13\pi}{8} \rightarrow \frac{13\pi}{8}.\frac{180°}{\pi} = 292{,}5°$$

Recuérdese que usualmente en matemáticas no se trabaja con los ángulos expresados en grados sino en radianes, mas sin embargo aquí hemos hecho la representación en grados para poder ver más fácilmente un posible error que puede darse de querer decir que las dos últimas expresiones de la raíces z_2 y z_3 estan bien representadas. Se sabe que todas las raíces de un número complejo deben caer en el intervalo $[-\pi,\pi)$, esto en grados quiere decir que los argumentos no deben salirse de -180° y 180°, en nuestro caso vemos que los argumentos de las dos últimas raíces son mayores a los 180°, por lo tanto aunque al momento de graficarlas estén bien, y además estén bien calculadas están mal representadas.

Para solventar este problema se debe tantear un ángulo que restado a esos argumentos (en grados para poder verlo en el plano) permita una buena representación de las últimas raíces, véase que 202,5° está en el tercer cuadrante por lo que si se le resta 360° no solo cae en el mismo "lugar" de ese cuadrante sino que además también en $[-\pi,\pi)$ y para 292,5° que cae en el cuarto cuadrante se debe restar 360° para que pueda llegar a estar entre -180° y 180°.
Ojo: se restan los 360° y no se suman porque en este caso los argumentos superaron a 180° y había que "hacerlos retroceder"

$$202{,}5° - 360° = -157{,}5° \rightarrow -157{,}5° \,.\, \frac{\pi}{180°} = 0{,}875\pi$$
$$292{,}5° - 360° = -67{,}5° \rightarrow -67{,}5° \,.\, \frac{\pi}{180°} = 0{,}375\pi$$

Respuesta:

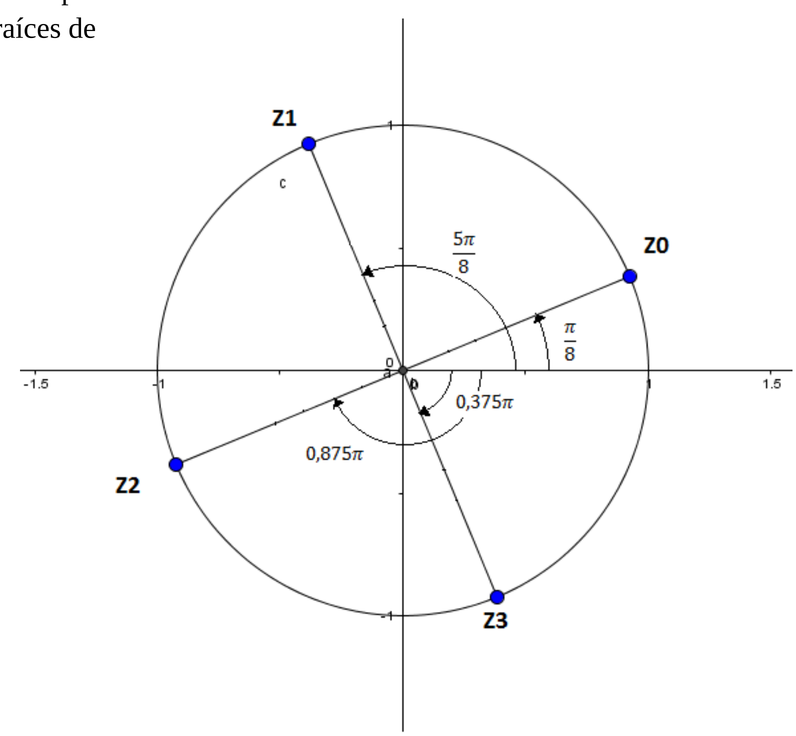
$$z_{k=0} = cis\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i.sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$z_1 = cis\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) = cis\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + i.sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)$$

$$z_2 = cis\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right) = cis\left(\frac{9\pi}{8}\right) = cis(0{,}875\pi) = \cos(0{,}875\pi) + i.sin(0{,}875\pi)$$

$$z_3 = cis\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2}\right) = cis\left(\frac{13\pi}{8}\right) = cis(0{,}375\pi) = \cos(0{,}375\pi) + i.sin(0{,}375\pi)$$

Aunque esta representación gráfica fue hecho con software es posible hacerla a mano teniendo en cuenta la medida de ángulos en grados y aproximándolos por los ángulos notables vea además que si se unen los puntos azules (que son las raíces) se obtiene un polígono regular, esto debe pasar siempre en la representación gráfica de las raíces de un número complejo.



Ejercicio 2: *Encuentre y grafique las raíces del siguiente número complejo:*

$$z^5 = \sqrt{3} - i$$

Solución:

Construimos primero un número complejo w tal que

$$z^5 = \sqrt{3} - i = w \;\; \rightarrow \;\; w = \sqrt{3} - i \;\; \rightarrow \;\; w^{\frac{1}{5}} = \left(\sqrt{3} - i\right)^{\frac{1}{5}} = z$$

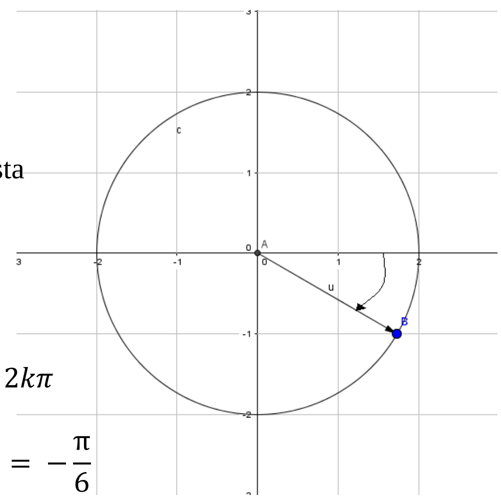
Aquí la idea fue construir un nuevo número complejo que sea idéntico al que tiene z^5 en la igualdad, así al elevar este número a la potencia inversa de z (osea 1/5) se despeje z automáticamente.

Ahora nos disponemos a utilizar la fórmula de Môivre, para eso expresamos primero $\sqrt{3} - i$ en forma polar.

Primero el módulo

$$|\sqrt{3} - i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$$

Ahora el argumento



Veamos primero gráficamente donde está el número complejo.

La flecha curva indica el argumento del número complejos que en esta gráfica está representado como el punto azul señalado por un vector (el número complejo es el punto, no el vector).

Entonces:

$$\text{Arg}(w) = \arg(w) + 2k\pi$$

$$\arg(w) = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

Con estos datos tenemos:

$$w = 2.cis\left(2k\pi - \frac{\pi}{6}\right), k \in Z$$

Recordando que:

$$w^{\frac{1}{5}} = \left(\sqrt{3} - i\right)^{\frac{1}{5}} = z$$

Y aplicando la fórmula de Môivre con n=1/5

$$w^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{5}}.cis\left(\left(2k\pi - \frac{\pi}{6}\right).\frac{1}{5}\right) = 2^{\frac{1}{5}}.cis\left(\frac{2k\pi}{5} - \frac{\pi}{30}\right)$$

La pregunta ahora es de donde a donde debe variar k, para esto recordemos que son 5 raíces complejas las que se están buscando dada la expresión $z^5 = \sqrt{3} - i$, entonces k=0, 1, 2, 3, 4. El cero debe incluirse dado que la rama principal (o inicial) de los números complejos comienza en k = 0 no en k = 1.

Así:

$$z_0 = 2^{\frac{1}{5}}.cis\left(\frac{-\pi}{30}\right), \frac{-\pi}{30} \rightarrow \frac{-\pi}{30}.\frac{180°}{\pi} = -6°$$

$$z_1 = 2^{\frac{1}{5}}.cis\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{30}\right) = 2^{\frac{1}{5}}.cis\left(\frac{11\pi}{30}\right), \frac{11\pi}{30} \rightarrow \frac{11\pi}{30}.\frac{180°}{\pi} = 66°$$

$$z_2 = 2^{\frac{1}{5}}.cis\left(\frac{4\pi}{5} - \frac{\pi}{30}\right) = 2^{\frac{1}{5}}.cis\left(\frac{23\pi}{30}\right), \frac{23\pi}{30} \rightarrow \frac{23\pi}{30}.\frac{180°}{\pi} = 138°$$

$$z_3 = 2^{\frac{1}{5}}.cis\left(\frac{6\pi}{5} - \frac{\pi}{30}\right) = 2^{\frac{1}{5}}.cis\left(\frac{7\pi}{6}\right), \frac{7\pi}{6} \rightarrow \frac{7\pi}{6}.\frac{180°}{\pi} = 210°$$

$$z_4 = 2^{\frac{1}{5}}.cis\left(\frac{8\pi}{5} - \frac{\pi}{30}\right) = 2^{\frac{1}{5}}.cis\left(\frac{47\pi}{30}\right), \frac{47\pi}{30} \rightarrow \frac{47\pi}{30}.\frac{180°}{\pi} = 282°$$

Recuérdese que usualmente en matemáticas no se trabaja con los ángulos expresados en grados sino en radianes, mas sin embargo aquí hemos hecho la representación en grados para poder ver más fácilmente un posible error que puede darse de querer decir que las dos últimas expresiones de la raíces z_3 y z_4 estan bien representadas. Se sabe que todas las raíces de un número complejo deben caer en el intervalo $[-\pi,\pi)$, esto en grados quiere decir que los argumentos no deben salirse de -180° y 180°, en nuestro caso vemos que los argumentos de las dos últimas raíces son mayores a los 180°, por lo tanto aunque al momento de graficarlas estén bien, y además estén bien calculadas están mal representadas.

Para solventar este problema se debe tantear un ángulo que restado a esos argumentos (en grados para poder verlo en el plano) permita una buena representación de las últimas raíces, véase que 210° está en el tercer cuadrante por lo que si se le resta 360° no solo cae en el mismo "lugar" de ese cuadrante sino que además también en $[-\pi,\pi)$ y para 282° que cae en el cuarto cuadrante se realuza la misma operación.
Ojo: se restan los 360° y no se suman porque en este caso los argumentos superaron a 180° y había que "hacerlos retroceder"

$$210° - 360° = -150° \rightarrow -150°.\frac{\pi}{180°} = \frac{-5\pi}{6}$$

$$282° - 360° = -78° \rightarrow -78°.\frac{\pi}{180°} = \frac{-13\pi}{30}$$

Respuesta:

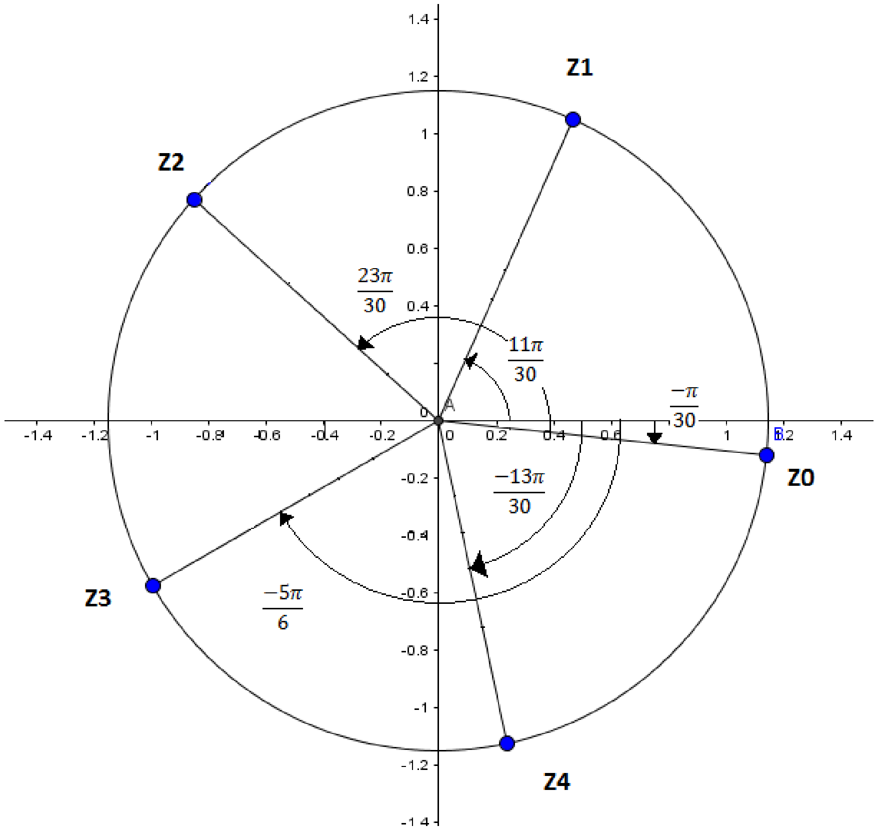
$$z_0 = 2^{\frac{1}{5}}.cis\left(\frac{-\pi}{30}\right)$$

$$z_1 = 2^{\frac{1}{5}}.cis\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{30}\right) = 2^{\frac{1}{5}}.cis\left(\frac{11\pi}{30}\right)$$

$$z_2 = 2^{\frac{1}{5}}.cis\left(\frac{4\pi}{5} - \frac{\pi}{30}\right) = 2^{\frac{1}{5}}.cis\left(\frac{23\pi}{30}\right)$$

$$z_3 = 2^{\frac{1}{5}}.cis\left(\frac{6\pi}{5} - \frac{\pi}{30}\right) = 2^{\frac{1}{5}}.cis\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 2^{\frac{1}{5}}.cis\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$$

$$z_4 = 2^{\frac{1}{5}}.cis\left(\frac{8\pi}{5} - \frac{\pi}{30}\right) = 2^{\frac{1}{5}}.cis\left(\frac{47\pi}{30}\right) = 2^{\frac{1}{5}}.cis\left(\frac{-13\pi}{30}\right)$$



Vea que si se trazan rectas de punto a punto (los puntos son las raíces) se forma un polígono regular (en este caso un pentágono), esto debe pasar siempre en la representación gráfica.

Ejercicio 3: *Encuentre a que es igual la expresión*

$$\sqrt{1+i}$$

Y diga porqué es diferente resolver ese ejercicio a resolver este otro

$$z^2 = 1+i$$

Solución:

Empecemos viendo el ejercicio inicial como un número complejo w que se elevó a la potencia (1/2), este es el procedimiento correcto para empezar este tipo de ejercicios.

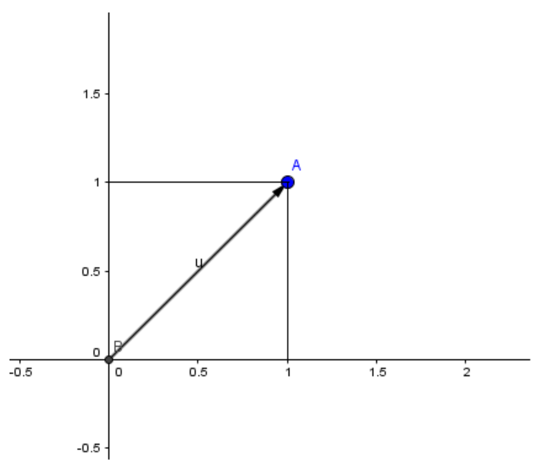
$$w = 1+i \;\; \rightarrow \;\; w^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+i}$$

Veamos la forma polar de w.

$$|w| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

Veamos la expresión gráfica de w para identificar el argumento de

la rama principal.



No hace falta decir por el cuadrado dibujado que:

$$Arg(w) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Así entonces:

$$w = \sqrt{2}.cis\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

Entonces por la fórmula de Môivre:

$$w^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}^{\frac{1}{2}}.cis\left[\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right).\frac{1}{2}\right] = 2^{\frac{1}{4}}.cis\left(\frac{\pi}{8} + k\pi\right)$$

En este punto debemos pensar que estamos buscando una expresión análoga a $\sqrt{1+i}$ no estamos buscando las raíces de este número por lo que solo nos basta considerar la rama principal con k=0, para nuestro análisis.

$$\sqrt{1+i} = 2^{\frac{1}{4}}.cis\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2^{\frac{1}{4}}.\left(cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i.sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

Ahora si en vez de pensar el ejercicio como se hizo desde un principio y hago el siguiente análisis

$$z = \sqrt{1+i} \;\; \rightarrow \;\; z^2 = 1+i$$

Nos estaríamos disponiendo a calculas las raíces de de esta z la que po supuesto arrojará dos valores y no uno.

Sea

$$w = 1+i = z^2 \;\; \rightarrow \;\; w^{\frac{1}{2}} = (1+i)^{\frac{1}{2}} = z \;\; \rightarrow w^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}^{\frac{1}{2}}.cis\left[\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right).\frac{1}{2}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \;\; w^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}^{\frac{1}{2}}.cis\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right) \;, k = 0{,}1.$$

$$z_0 = \sqrt{2}^{\frac{1}{2}}.cis\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2^{\frac{1}{4}}.\left(cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i.sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$$z_1 = \sqrt{2}^{\frac{1}{2}}.cis\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right) = 2^{\frac{1}{4}}.\left(cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)+i.sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right), \frac{9\pi}{8}.\frac{180°}{\pi} = 202{,}5°$$

Para hacer que el ángulo de la segunda raíz caiga en $[-\pi,\pi)$ restamos 360° al ángulo obtenido (ver los ejercicios 1 y 2 anteriores a este)

$$202{,}5° - 360° = -157{,}5° \;\; \rightarrow \;\; -157{,}5°.\frac{\pi}{180°} = -0{,}875\pi$$

Respuesta:

$$\sqrt{1+i} = 2^{\frac{1}{4}}.\left(cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i.sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

Resolver este ejercicio es diferente a pensar que la expresión $\sqrt{1+i}$ proviene de $z^2 = 1+i$, ya que en la segunda se calculan las raíces de z y se arrojarán dos resultados en cambio para simplificar $\sqrt{1+i}$ solo necesitamos pensar que este es un número complejo w que se elevó a (1/2).

Este ejercicio es para mostrar que la fórmula de Môivre se puede utilizar no solo para el cálculo de raíces sino también para la simplificación de expresiones que involucren potencias.

Ejercicio 4: *Expresar el número real A en la forma $x + iy$*

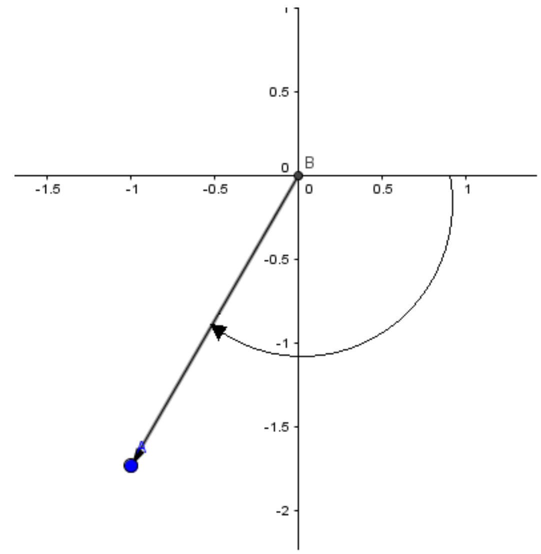
$$A = (-1 - i.\sqrt{3})^{22}$$

Solución:

Antes que nada ya que nos disponemos a utilizar la fórmula de Môivre para este problema, es necesario expresar A en su forma polar

$$|A| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Para el argumento veamos gráficamente el número



$$\arg(A) = -\pi + tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = -\pi + tan^{-1}(-\sqrt{3}) =$$

$$-\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{-2\pi}{3} \rightarrow \arg(A) = \frac{-2\pi}{3}$$

Entonces

$$A = 2.cis\left(\frac{-2\pi}{3}\right), \ A = (-1 - i.\sqrt{3})^{22} = \left(-1 - i.\sqrt{3}\right)^{21}.\left(-1 - i.\sqrt{3}\right) \rightarrow \rightarrow \left(2.cis\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)^{21}.\left(-1 - i.\sqrt{3}\right)$$

Recordemos que tratamos de expresar este puntual número A de otra forma (de la forma $x + iy$) por lo que no consideramos el $Arg(A)$ y la k que consideramos en $k = 0$.

$$\left(2.cis\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)^{21} = 2^{21}.cis\left(\frac{-2\pi}{3}.21\right) = 2^{21}.cis\left(\frac{-2\pi}{3}.3.7\right) = 2^{21}.cis(-14\pi)$$

Veamos este argumento en grados para analizarlo y ver si es posible llegar a un ángulo notable.

$$-14\pi.\frac{180°}{\pi} = -2520°, \qquad 360°.7 = 2520°$$

Entonces se ve claramente que 2520 es múltiplo de 360 y es lo mismo considerar 2520° que 0°, más aun este paso no era necesario si se veía que -14π es múltiplo par de π entonces:

$$2^{21}.cis(-14\pi) = 2^{21}.(\cos(-14\pi) + i.sen(-14\pi)) = 2^{21}.(\cos(14\pi) - i.sen(14\pi)) = 2^{21}$$

Respuesta:

$$\left(-1 - i.\sqrt{3}\right)^{22} = \left(-1 - i.\sqrt{3}\right)^{21}.\left(-1 - i.\sqrt{3}\right) = -2^{21}.\left(1 + i.\sqrt{3}\right)$$

El truco de considerar la expresión de la forma $\left(-1 - i.\sqrt{3}\right)^{28}.\left(-1 - i.\sqrt{3}\right)$ no es más que un paso conveniente para llegar a un resultamos más resumido y atractivo, se ha podido utilizar la fórmula de Môivre con la potencia 22 y el resultado sería diferente pero igual de válido. Otro punto a considerar es que se trabajó este ejercicio en la rama principal con $k = 0$, era válido encontrar una respuesta de la forma más general posible considerando el ya conocido $2k\pi$ dentro del argumento del Cis.

Álgebra de números complejos.

Ejercicio 1: *Expresar los siguientes números complejos en la forma a+ib o en la forma de una función trigonométrica*

$$a)\, ln\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right), \qquad b)\, \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}, \qquad c)\, \frac{-\left(i^i - i^{-i}\right)}{\left(i^i + i^{-i}\right)}$$

Solución:

Solución de *a)*

$$ln\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = ln\left|\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right| + i\left(arg\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2k\pi\right)$$

Veamos la expresión para el módulo

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

Veamos la expresión para el argumento

$$arg\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = tan^{-1}\left(\frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}}\right) = tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

Armando todo esto

$$ln\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = ln(1) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

Solución de *b)*

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i} = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1} . \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{i}$$

Estudiemos la última expresión por separado

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{i} = e^{ln\left[\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{i}\right]} = e^{i.ln\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)}$$

Y ahora esta otra

$$ln\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = ln\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = ln\left|\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right| + i\left(arg\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2k\pi\right) = i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

Así

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i} = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right).e^{i.i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)} = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right).e^{\left(\frac{\pi}{4}-2k\pi\right)} = \frac{e^{\left(\frac{\pi}{4}-2k\pi\right)}}{\sqrt{2}} - i\frac{e^{\left(\frac{\pi}{4}-2k\pi\right)}}{\sqrt{2}}$$

Solución de *c)*

$$\frac{-\left(i^i - i^{-i}\right)}{\left(i^i + i^{-i}\right)}$$

Esta expresión no es otra cosa que la combinación de los dos factores i^i y i^{-i}

$$i^i = e^{\ln\left(i^i\right)} = e^{i.ln(i)}$$

$$ln(i) = ln(1) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

$$i^i = e^{i.i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$$

No es difícil mostrar que

$$i^{-i} = e^{-i.i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = e^{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$$

Entonces

$$\frac{-\left(i^i - i^{-i}\right)}{\left(i^i + i^{-i}\right)} = \frac{-\left(e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} - e^{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\right)}{e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} + e^{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}} = \frac{e^{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} - e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}}{e^{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} + e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}} = \frac{2.\left(\frac{e^{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} - e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}}{2}\right)}{2.\left(\frac{e^{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} + e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}}{2}\right)}$$

$$= \frac{senh\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}{cosh\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = tanh\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

Respuesta:

$$a)\ \ ln\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

$$b)\ \ \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i} = \frac{e^{\left(\frac{\pi}{4}-2k\pi\right)}}{\sqrt{2}} - i\,\frac{e^{\left(\frac{\pi}{4}-2k\pi\right)}}{\sqrt{2}}$$

$$c)\ \ \frac{-\left(i^i - i^{-i}\right)}{\left(i^i + i^{-i}\right)} = tanh\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

Ejercicio 2: *Expresar el siguiente número w en la forma a+ib*

$$w = tan(2-i)$$

Solución:

$$tan(2-i) = \frac{sen(2-i)}{cos\,(2-i)}$$

Conociendo las siguientes identidades trigonométricas

$$sen(a-b) = sen(a)\,cos(b) - sen(b)\,cos(a)$$

$$cos(a-b) = cos(a)\,cos(b) + sen(a)sen(b)$$

Tenemos

$$tan(2-i) = \frac{sen(2)\,cos(i) - sen(i)\,cos(2)}{cos(2)\,cos(i) + sen(2)sen(i)}$$

Veamos en que se convierten los términos $cos(i)$ y $sen(i)$

$$cos(i) = \frac{e^{i.i} + e^{-i.i}}{2} = \frac{e^{-1} + e^{1}}{2} = \frac{e^{1} + e^{-1}}{2} = cosh\,(1)$$

$$sen(i) = \frac{e^{i.i} - e^{-i.i}}{2i} = \frac{1}{i}.\frac{e^{-1} - e^{1}}{2} = i.\frac{e^{1} - e^{-1}}{2} = i.senh\,(1)$$

Así

$$tan(2-i) = \frac{sen(2)\cosh(1) - i.senh(1)\,cos(2)}{cos(2)\cosh(1) + i.sen(2)senh(1)}$$

Solo multiplicando por un "uno" que sea el conjugado del denominado podremos hacer real el denominador

$$tan(2-i) = \frac{sen(2)\,cosh(1) - i.senh(1)\,cos(2)}{cos(2)\,cosh(1) + i.sen(2)senh(1)}.\frac{cos(2)\,cosh(1) - i.sen(2)senh(1)}{cos(2)\,cosh(1) - i.sen(2)senh(1)} =$$

$$\frac{cosh^2(1)sen(2)\,cos(2) - i.cos^2(2)senh(1)\,cosh(1) - i.sen^2(2)\,cosh(1)\,senh(1) - senh^2(1)\,cos(2)\,sen(2)}{cos^2(2)\,cosh^2(1) + sen^2(2)senh^2(1)}$$

$$= \frac{sen(2)\,cos(2)(cosh^2(1) - senh^2(1)) - i.senh(1)\,cosh(1)\,(cos^2(2) + sen^2(2))}{cos^2(2)\,cosh^2(1) + sen^2(2)senh^2(1)} =$$

Conociendo las siguientes identidades hiperbólica y trigonométrica

$$cosh^2(a) - senh^2(a) = 1$$

$$cos^2(a) + sen^2(a) = 1$$

Así

$$tan(2-i) = \frac{sen(2)\,cos(2) - i.senh(1)\,cosh(1)}{cos^2(2)\left(1 + senh^2(1)\right) + sen^2(2)senh^2(1)} =$$

$$= \frac{sen(2)\, cos(2) - i.\, senh(1)\, cosh(1)}{cos^2(2) + cos^2(2)\, senh^2(1) + sen^2(2) senh^2(1)} = \frac{\frac{2.\, sen(2)\, cos(2)}{2} - \frac{i.\, 2.\, senh(1)\, cosh(1)}{2}}{cos^2(2) + senh^2(1).\, (cos^2(2) + sen^2(2))} =$$

$$= \frac{2.\, sen(2)\, cos(2) - i.\, 2.\, senh(1)\, cosh(1)}{2.\left(cos^2(2) + senh^2(1)\right)}$$

Conociendo las siguientes identidades hiperbólica y trigonométrica

$$sen(2a) = 2.\, sen(a)\, cos(a)$$

$$senh(2a) = 2.\, senh(a)\, cosh(a)$$

Así

$$tan(2 - i) = \frac{sen(4) - i.\, senh(2)}{2.\left(cos^2(2) + senh^2(1)\right)}$$

Respuesta:

$$tan(2 - i) = \left[\frac{sen(4)}{2.\left(cos^2(2) + senh^2(1)\right)}\right] - i.\left[\frac{senh(2)}{2.\left(cos^2(2) + senh^2(1)\right)}\right]$$

Dese cuenta que la respuesta es de la forma *a+ib*

Ejercicio 3: *Encontrar una expresión algebraica para la función inversa de cos(z)*

Solución:

Ahora que se conoce una expresión directa para la función coseno que consta de suma de exponenciales, podemos manipular dicha expresión para luego aplicar el logaritmo complejo y llegar a la función pedida.

$$cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \;\; \rightarrow \;\; cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = w$$

Recordar que para encontrar la función inversa se tiene que despejar *z* en función de *w*.

$$\mathrm{w} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \;\; \rightarrow \;\; 2w = e^{iz} + e^{-iz} \;\; \rightarrow \;\; 2w = e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}} \;\; \rightarrow \;\; 2w = \frac{\left(e^{iz}\right)^2 + 1}{e^{iz}} \;\; \rightarrow\rightarrow \;\; 2we^{iz} = \left(e^{iz}\right)^2 + 1$$
$$\rightarrow \;\; \left(e^{iz}\right)^2 - 2w\left(e^{iz}\right) + 1 \; = 0$$

De aquí en adelante hay varios caminos, la técnica que se usará aquí es hacer un cambio de variables

$$e^{iz} = k$$

$$\left(e^{iz}\right)^2 - 2w\left(e^{iz}\right) + 1 \; = 0 \;\; \rightarrow \;\; (k)^2 - 2w(k) + 1 \; = 0$$

Esto es un polinomio de grado dos que bien puede resolverse por una resolvente

$$k = \frac{-(-2w) \pm \sqrt{(-2w)^2 - 4.1.1}}{2.1} = \frac{2w \pm \sqrt{4w^2 - 4}}{2} = \frac{2w \pm 2\sqrt{w^2 - 1}}{2} = w \pm \sqrt{w^2 - 1}$$

Basta con tomas los valores positivos de la raíz, y así

$$k = w + \sqrt{w^2 - 1} = e^{iz} \;\; \rightarrow \;\; e^{iz} = w + \sqrt{w^2 - 1}$$

Tomando logaritmo complejo en ambos lado de la igualdad

$$ln\left(e^{iz}\right) = ln\left(w + \sqrt{w^2 - 1}\right) \;\; \rightarrow \;\; iz = ln\left(w + \sqrt{w^2 - 1}\right) \;\; \rightarrow \;\; z = -i.\,ln\left(w + \sqrt{w^2 - 1}\right)$$

Respuesta:

$$cos^{-1}(z) = -i.\,ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

Usando este procedimiento o uno similar se pueden resolver todos los problemas que se vean de la siguiente manera

$$sen(z) = a + ib$$

$$cos(z) = a + ib$$

$$tan(z) = a + ib$$

$$senh(z) = a + ib$$

$$cosh(z) = a + ib$$

$$tanh(z) = a + ib$$

Un buen ejemplo puede ser el siguiente ejercicio.

Despejar el valor de z de la siguiente ecuación.

$$tan(z) = -1 + i$$

Solución:

Este ejercicio puede ser resulto de dos maneras, o encontramos la expresión de la función inversa de la tangente y luego sustituimos el valor del número $(-1+i)$ ó tratamos este número como un número a (que sería un número complejo) y vamos despejando z con a en la ecuación. Tomaremos el segundo camino, ya que el primero fue practicado anteriormente.

Primero expresemos resumidamente a la tangente en su forma exponencial

$$tan(z) = \frac{\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}{\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i.(e^{iz} + e^{-iz})} = \frac{i.(e^{-iz} - e^{iz})}{(e^{iz} + e^{-iz})} = \frac{i.\left(1 - (e^{iz})^2\right)}{(1 + (e^{iz})^2)}$$

Entonces regresando al ejercicio

$$tan(z) = -1 + i \;\; \rightarrow \;\; \frac{i.\left(1 - (e^{iz})^2\right)}{(1 + (e^{iz})^2)} = \; -1 + i \;, \begin{matrix} a = -1 + i \\ e^{iz} = h \end{matrix} \;\; \rightarrow \frac{i.(1 - h^2)}{(1 + h^2)} = \; a \; \rightarrow$$

$$\rightarrow \; i.(1 - h^2) = a.(1 + h^2) \;\; \rightarrow i - i.h^2 - a - a.h^2 = 0 \;\; \rightarrow \;\; h^2(i + a) + (a - i) = 0 \;\; \rightarrow$$

$$h^2 = \frac{i - a}{i + a} \;\; \rightarrow \;\; e^{i2z} = \frac{i - a}{i + a} = \frac{i - (-1 + i)}{i + (-1 + i)} \;\; \rightarrow \;\; e^{i2z} = \frac{1}{-1 + i2}$$

Ahora que el término que contiene a la variable está despejado es que podemos utilizar el logaritmo complejo.

$$ln\left(e^{i2z}\right) = ln\left(\frac{1}{-1 + i2}\right) \;\; \rightarrow \;\; i2z = ln\left(\frac{1}{-1 + i2} . \frac{-1 - i2}{-1 - i2}\right) \;\; \rightarrow i2z = ln\left(\frac{-1}{5} - \frac{i2}{5}\right)$$

Examinemos a que es igual $ln\left(\frac{-1}{5} - \frac{i2}{5}\right)$

$$ln\left(\frac{-1}{5} - \frac{i2}{5}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25}}\right) + i\left(arg\left(\frac{-1}{5} - \frac{i2}{5}\right) + 2k\pi\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + i(-\pi + tan^{-1}(2) + 2k\pi)$$

Terminando con el ejercicio

$$i2z = \ln\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + i(-\pi + tan^{-1}(2) + 2k\pi) \;\; \rightarrow \;\; z = \frac{-i}{2}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + i\left((\pi(2k - 1) + tan^{-1}(2)\right)\right]$$

Respuesta:

$$z = \left[\frac{1}{2}.\left(\pi(2k - 1) + tan^{-1}(2)\right)\right] - i\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right]$$

Ejercicio 4: *Resolver la siguiente ecuación*

$$\cos(z) = \cosh\,(z)$$

Solución:

$$\cos(z) = \cosh(z) \;\rightarrow\; \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \;\rightarrow\; e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}} = e^{z} + \frac{1}{e^{z}} \;\rightarrow\; e^{iz} - \frac{1}{e^{z}} = e^{z} - \frac{1}{e^{iz}} \;\rightarrow$$

El paso anterior es el más difícil de identificar, para poder continuar el ejercicio si no se combinaran los términos iz y z realizando el paso anterior, el ejercicio iría hacia respuestas triviales o sin sentido, ya que lo que quedaría sería operar los miembros de las ecuaciones teniendo de un lado la unidad compleja en los exponentes y del otro la unidad real en los exponentes, los cálculos algebraicos no nos llevarían a ningún lado.

$$\rightarrow\; \frac{e^{iz}e^{z}-1}{e^{z}} = \frac{e^{z}e^{iz}-1}{e^{iz}} \;\rightarrow\; \frac{\left(e^{z(1+i)}-1\right)}{e^{z}} = \frac{\left(e^{z(1+i)}-1\right)}{e^{iz}} \;\rightarrow\; \frac{e^{z}}{e^{iz}}.\left(e^{z(1+i)}-1\right) = \left(e^{z(1+i)}-1\right) \;\rightarrow$$

Es tentativo pasar el factor $\left(e^{z(1+i)}-1\right)$ dividiendo, pero esto es un error, ese factor puede ser cero para ciertos valores de z, lo correcto es pasarlo restando.

$$\frac{e^{z}}{e^{iz}}.\left(e^{z(1+i)}-1\right) - \left(e^{z(1+i)}-1\right) = 0 \;\rightarrow\; e^{z(1-i)}.\left(e^{z(1+i)}-1\right) - \left(e^{z(1+i)}-1\right) = 0 \;\rightarrow$$

$$\left(e^{z(1+i)}-1\right)\left(e^{z(1-i)}-1\right) = 0$$

$$e^{z(1+i)} - 1 = 0 \rightarrow e^{z(1+i)} = 1 \rightarrow z(1+i) = \ln(1) \rightarrow\; z(1+i) = i(0+2k\pi) \rightarrow\; z(1+i) = i2k\pi \rightarrow z = (1+i)k\pi$$
$$e^{z(1-i)} - 1 = 0 \;\rightarrow e^{z(1-i)} = 1 \rightarrow z(1-i) = \ln(1) \rightarrow\; z(1-i) = i(0+2k\pi) \rightarrow z(1-i) = i2k\pi \rightarrow z = (-1+i)k\pi$$

Respuesta:

$$z = (1+i)k\pi$$
$$z = (-1+i)k\pi$$

Funciones Analíticas.

Ejercicio 1: *Hallar la conjugada armónica de $u(x+iy)$ y luego la función $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ donde:*

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Solución:

Si existe la función $v(x,y)$entonces ella cumple las condiciones de Cauchy-Riemman necesarias para la analiticidad.

$$u_x = v_y \quad , \ u_y = -v_x$$

De aquí en adelante se tienen dos caminos posibles, el primero es el más difícil derivando $u(x,y)$ respecto a x (este camino se utilizará en el ejercicio 4) el segundo es considerablemente más fácil, consiste en tomar la derivada parcial de $u(x,y)$ respecto a y, y por aquí seguiremos

$$u_y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -v_x$$

$$v(x,y) = y\int \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \frac{-y}{(x^2+y^2)} + \varphi(y)$$

Tomamos este resultado y lo derivamos respecto a y

$$v_y = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(y)$$

Si ahora derivamos $u(x,y)$ respecto a x e igualamos valiéndonos de las condiciones de Cauchy-Riemman

$$v_y = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = u_x \ \rightarrow \ \varphi'(y) = 0 \ \rightarrow \ \varphi(y) = Cte = c$$

Solo para fines prácticos de este ejercicio consideraremos $c = 0$

Entonces:

$$v(x,y) = \frac{-y}{(x^2+y^2)}$$

Finalmente

$$f(z) = u(x,y) + i.v(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{i.y}{(x^2+y^2)} = \frac{x-i.y}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{z.\bar{z}} = \frac{1}{z}$$

Respuesta:

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

Ejercicio 2: *Expresar la siguiente función $f(x,y)$ como una función que dependa únicamente de z*

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - 2xy + ix^2 - \frac{iy}{x^2 + y^2} - iy^2$$

Solución:

Recuérdese que para q se pueda escribir $f(x,y)$ como una función $f(z)$ que dependa únicamente de z la misma debe satisfacer dos condiciones
1. Las primeras derivadas (respecto a x y respecto a y) de $f(x,y)$ deben existir (estas pueden no existir en algunos puntos x e y, eso lo que significa es que seguramente $f(z)$ no será analítica en esos puntos).

2. $u(x,y)$ y $v(x,y)$ deben satisfacer las condiciones de Cauchy-Riemman, $u_x = v_y,\ u_y = -v_x$

Condición 1.

$$f_x(x,y) = -2y - \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2(y^2 + ixy)}{(x^2 + y^2)^2} + i2x$$

$$f_y(x,y) = -2y - \frac{i}{x^2 + y^2} + \frac{2(i.y^2 + xy)}{(x^2 + y^2)^2} - i2y$$

De aquí lo que podemos ir concluyendo es que lo más seguro sea que $f(z)$no sea analítica es $z = 0$

Condición 2.
Para comprobar esta condición es recomendable expresar $f(x,y)$ como $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$

$$f(x,y) = \left[\frac{x}{x^2 + y^2} - 2xy\right] + i\left[(x^2 - y^2) - \frac{y}{x^2 + y^2}\right]$$

$$u_x = \frac{2.y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} - 2y = v_y$$

$$u_y = \frac{2.xy}{(x^2 + y^2)^2} + 2y = -v_x$$

En efecto podremos encontrar una expresión que dependa únicamente de z haciendo operaciones algebraicas sobre$f(x,y)$, recuerde que $x + iy = z$

$$f(x,y) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} - 2xy + i(x^2 - y^2) = \frac{x - iy}{(x - iy).(x + iy)} + i.x^2 - 2xy - i.y^2 =$$

$$= \frac{1}{x + iy} + i.x^2 - xy - xy - i.y^2 = \frac{1}{x + iy} + i.x^2 + i^2.xy + i^2.xy + i^3.y^2 =$$

$$= \frac{1}{x + iy} + ix.(x + iy) + i^2.y(x + iy) = \frac{1}{x + iy} + i(x + iy).(x + iy) = \frac{1}{z} + i.z.z = \frac{1}{z} + i.z^2$$

Respuesta:

$f(z) = \frac{1}{z} + i.z^2$ Vea que como se supuso $f(z)$ no es analítica en $z = 0$

__Ejercicio 3:__ Determinar si la función $f(x,y)$ definida por:

$$f(x,y) = x^3 + i3x^2.y + e^{x^2-y^2}.cos(2xy) - iy^3 + i.e^{x^2-y^2}.sin(2xy) - 3y^2.x$$

Es una función analítica. Hallar demás la expresión cerrada de $f(z)$ en términos de z solamente.

Solución:

Lo primero es identificar $u(x,y)$ y $v(x,y)$ recordando que $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$

$$f(x,y) = \left[x^3 - 3y^2.x + e^{x^2-y^2}.\cos(2xy)\right] + i\left[3x^2.y - y^3 + e^{x^2-y^2}.\sin(2xy)\right]$$

$$u(x,y) = x^3 - 3y^2.x + e^{x^2-y^2}.\cos(2xy)$$

$$v(x,y) = 3x^2.y - y^3 + e^{x^2-y^2}.\sin(2xy)$$

Recuérdese que para q se pueda escribir $f(x,y)$ como una función $f(z)$ que dependa únicamente de z la misma debe satisfacer dos condiciones

1. Las primeras derivadas (respecto a x y respecto a y) de $f(x,y)$ deben existir (estas pueden no existir en algunos puntos x e y, eso lo que significa es que seguramente $f(z)$ no será analítica en esos puntos).

2. $u(x,y)$ y $v(x,y)$ deben satisfacer las condiciones de Cauchy-Riemman, $u_x = v_y,\ u_y = -v_x$

Condición 1.

$$f_x(x,y) = 3(x+iy).\left[\frac{2}{3}.e^{x^2-i2xy-y^2} + x + iy\right]$$

$$f_y(x,y) = 3(x+iy).\left[\frac{2}{3}.e^{x^2-y^2}.(i.cos(2xy) - \sin(2xy)) + ix - y\right]$$

Parece no haber problemas con discontinuidades vistas desde el plano complejo, seguramente $f(z)$ es entera.

Condición 2.

$$u_x = 3(x^2 - y^2) + 2.e^{x^2-y^2}.(x.\cos(2xy) - y.\sin(2xy) = v_y$$

$$u_y = -6xy - 2ye^{x^2-y^2}.\cos(2xy) - 2xe^{x^2-y^2}.\sin(2xy) = -v_x$$

Con las condiciones comprobadas entonces podemos asegurar que es posible expresar $f(x,y)$ como una función que depende únicamente de z.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^3 + i3x^2.y + e^{x^2-y^2}.\cos(2xy) - iy^3 + i.e^{x^2-y^2}.\sin(2xy) - 3y^2.x \\ &= x^3 + i3x^2.y - 3y^2.x - i.y^3 + e^{x^2-y^2}.(\cos(2xy) + i.\sin(2xy)) \\ &= x^3 + i3x^2.y - 3y^2.x - i.y^3 + e^{x^2-y^2}.e^{i.2xy} \\ &= x^3 + i3x^2.y + i^2.3.y^2.x + (iy)^3 + e^{x^2+i.2xy-y^2} \\ &= x^3 + 3.x^2(iy) + 3.x(iy)^2 + (iy)^3 + e^{x^2+2x(iy)+(iy)^2} = (x+iy)^3 + e^{(x+iy)^2} = z^3 + e^{z^2} \end{aligned}$$

Respuesta:

$$f(z) = z^3 + e^{z^2}$$

Como se supuso la función es entera, esto significa que es analítica en todo el plano complejo.

Ejercicio 4: *Sea A una región simplemente conexa, que no contiene al punto $1+i2$, y sea*

$$u(x,y)=\frac{x-1}{(x-1)^2+(y-2)^2}$$

Hallar una función $V(x,y)\colon R^2\to R$ tal que $f(u,v)=u(x,y)+iv(x,y)$ sea analítica en A. Finalmente exprese $f(u,v)$ como una función que dependa solo de z.

Solución:

Para encontrar $v(x,y)$ debemos recordar que $u(x,y)$ tiene que cumplir con las condiciones de Cauchy-Riemman, así.

$$u_x=\frac{(y-2)^2-(x-1)^2}{((x-1)^2+(y-2)^2)^2}=v_y$$

$$u_y=\frac{-2(x-1)(y-2)}{((x-1)^2+(y-2)^2)^2}=-v_y$$

Si $u_x=v_y\to v(x,y)=\int u_x dy$, entonces

$$v(x,y)=\int\frac{(y-2)^2-(x-1)^2}{((x-1)^2+(y-2)^2)^2}dy,\begin{matrix} y-2=t\to dy=dt \\ x-1=a\end{matrix}\ \to\int\frac{t^2-a^2}{(a^2+t^2)^2}dt$$

Simplifiquemos primero el integrando usando trucos matemáticos

$$\begin{aligned}\frac{t^2-\ a^2}{(a^2+\ t^2)^2}&=\frac{t^2}{(a^2+\ t^2)^2}-\frac{a^2}{(a^2+\ t^2)^2}=\frac{t^2+\ a^2-a^2}{(a^2+\ t^2)^2}-\frac{a^2}{(a^2+\ t^2)^2}=\\ &=\frac{t^2+\ a^2}{(a^2+\ t^2)^2}-\frac{a^2}{(a^2+\ t^2)^2}-\frac{a^2}{(a^2+\ t^2)^2}=\frac{1}{(a^2+\ t^2)^1}-\frac{2a^2}{(a^2+\ t^2)^2}=\\ &=\ \frac{1}{(a^2+\ t^2)^1}-\frac{2.(a^2+t^2-t^2)}{(a^2+\ t^2)^2}==\frac{1}{(a+\ t^2)^1}-2.\left(\frac{t^2+\ a^2}{(a^2+\ t^2)^2}-\frac{t^2}{(a^2+\ t^2)^2}\right)=\\ &=\frac{1}{(a^2+\ t^2)^1}-\frac{2}{(a^2+\ t^2)^1}+\frac{2.t^2}{(a^2+\ t^2)^2}=\frac{2.t^2}{(a^2+\ t^2)^2}-\frac{1}{(a^2+\ t^2)}\end{aligned}$$

Entonces

$$v(x,y)=\ \int\left(\frac{2.t^2}{(a^2+\ t^2)^2}-\frac{1}{(a^2+\ t^2)}\right)dt=2.\int\frac{t^2}{(a^2+\ t^2)^2}\ dt-\ \int\frac{1}{(a^2+\ t^2)}\ dt$$

Resolvamos I primero

$$I=\int\frac{t^2}{(a^2+\ t^2)^2}\ dt$$

$$I=\ \int\frac{t^2}{(a^2+\ t^2)^2}\ dt=\ \int t.\frac{t}{(a^2+\ t^2)^2}\ dt$$

Ahora resolvamos

$$\int\frac{t}{(a^2+\ t^2)^2}\ dt$$

La idea es hacer una integral por partes.

$$\int \frac{t}{(a^2+\ t^2)^2}\ dt\,,\quad \begin{matrix}(a^2+\ t^2)=k\\ 2.tdt=dk\\ kdk=\dfrac{dk}{2}\end{matrix}\quad \rightarrow\ \frac{1}{2}.\int \frac{dk}{k^2}=\ \frac{-1}{2k}=\frac{-1}{2.(a^2+t^2)}$$

Integrando I por partes

$$I=\ \frac{-t}{2.(a^2+t^2)}+\ \frac{1}{2}.\int \frac{dt}{(a^2+t^2)}$$

Sustituyendo$I$ en $v(x,y)$

$$v(x,y)=\ 2.\left[\frac{-t}{2.(a^2+t^2)}+\frac{1}{2}.\int \frac{dt}{(a^2+t^2)}\right]-\ \int \frac{1}{(a^2+\ t^2)}\ dt=\ \frac{-t}{(a^2+t^2)}+\int \frac{dt}{(a^2+t^2)}\ -\ \int \frac{dt}{(a^2+t^2)}+\ \varphi(x)$$

$$v(x,y)=\frac{-t}{(a^2+t^2)}+\ \varphi(x)=\frac{-(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2}+\ \varphi(x)$$

$$v_x=\frac{-[-(y-2)2.(x-1)]}{[(y-2)^2+(x-1)^2]^2}+\varphi'(x)=-u_y=\frac{2(x-1)(y-2)}{((x-1)^2+(y-2)^2)^2}\rightarrow \varphi'(x)=0\rightarrow \varphi(x)=Cte=c,c\in R$$

$$\boldsymbol{v(x,y)=\frac{-(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2}+\ c}$$

$$f(x,y)=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=\frac{x-1}{(x-1)^2+(y-2)^2}+i\left[\frac{(2-y)}{(x-1)^2+(y-2)^2}+c\right]$$

Solo para simplificar los cálculos a partir de ahora tomaremos $c=0$, pudiera considerase igualmente en los cálculo como una constante genérica y esto no alteraría los resultados.

$$f(z)=\frac{x-1}{(x-1)^2+(y-2)^2}+\frac{i(2-y)}{(x-1)^2+(y-2)^2}=\frac{(x-1)-i(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2}$$

Si los factores $(x-1)$ y $(y-2)$ son variables reales de un número complejo desconocido, entonces da lo mismo que expresarlas como $(x-1)=x'$ y $(y-2)=y'$

$$f(z)=\frac{x'-iy'}{x'^2+y'^2}=\frac{x'-iy'}{(x'+iy')(x'-iy')}=\frac{1}{(x'+iy')}=\frac{1}{(x-1)+i(y-2)}=\frac{1}{x+iy-(1+i2)}=\frac{1}{z-(1+i2)}$$

$$\boldsymbol{f(z)=\frac{1}{z-(1+i2)}}$$

Respuesta:

La conjugada armónica de $u(x,y)$ es

$$v(x,y)=\frac{-(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2}+\ c$$

La función $f(x,y)$ expresada como función de z es

$$f(z)=\frac{1}{z-(1+i2)}$$

Vea que la función $f(z)$ es analítica es todo punto del plano complejo excepto en $(1+i2)$, tal y como sugería el enunciado del problema, por lo que la función que encontramos funciona.

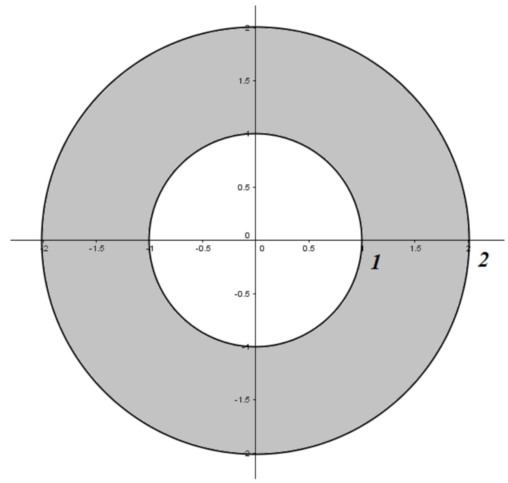
Series complejas.

Ejercicio 1: *Considere la función $f(z)$, esta es analítica en todas partes excepto en $z=1{,}2$ encuentre la serie de Laurent en las regiones a),b) y c).*

$$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2},\qquad a)\ 1<|z|<2,\qquad b)|z|<1,\qquad c)0<|z-1|<1$$

Solución:

$a)\ 1<|z|<2$



Dibujemos los anillos de convergencia de la serie.

Será siempre necesario expresar la función en sus fracciones parciales.

$$\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

Para un anillo de la forma $a<|z|<b$ debo pensar que se están pidiendo dos series, una de Laurent y otra de Taylor.

En la expresión algebraica de la función, aparecen los valores 2 y 1 que pueden usarse a conveniencia para "construir" las series, por lo general se utiliza la siguiente serie para las construcciones.

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

Empecemos con la región de Taylor $|z|<2$

De $\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$ tomo solo la expresión $\frac{1}{z-2}$ que es la que tiene el número 2 que me ayudará a construir la serie y la trabajo por separado.

$$\frac{1}{z-2}=\frac{-1/2}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}.\frac{1}{1-\left(\frac{z}{2}\right)}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

Si verificáramos este resultado por el teorema de la raíz

$$\lim_{z\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{z}{2}\right|^n}=\left|\frac{z}{2}\right|,\qquad \left|\frac{z}{2}\right|<1\ \rightarrow\ |z|<2$$

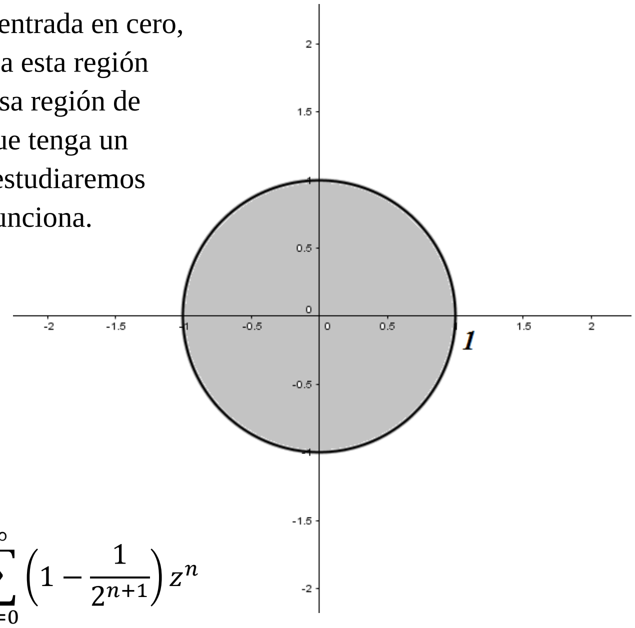
Pasamos a la serie de Laurent, tomando le término que nos quedó

$$\frac{1}{z-1}=\frac{-1/z}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}.\frac{1}{1-\left(\frac{1}{z}\right)}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

$$f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$b)|z|<1$

Solo se tiene una convergencia de una serie de Taylor, centrada en cero, uno de los términos será fácilmente llevable a converger a esta región el otro término, que pareciera no será posible llevarlo a esa región de convergencia igual deberemos trabajarlo almenos para que tenga un comportamiento igual al de una serie de Taylor, al final estudiaremos la convergencia d ela serie que nos quedó y veremos si funciona.



$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{-1/2}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}.\frac{1}{1-\left(\frac{z}{2}\right)} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$f(z) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(z^n - \frac{z^n}{2^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$$

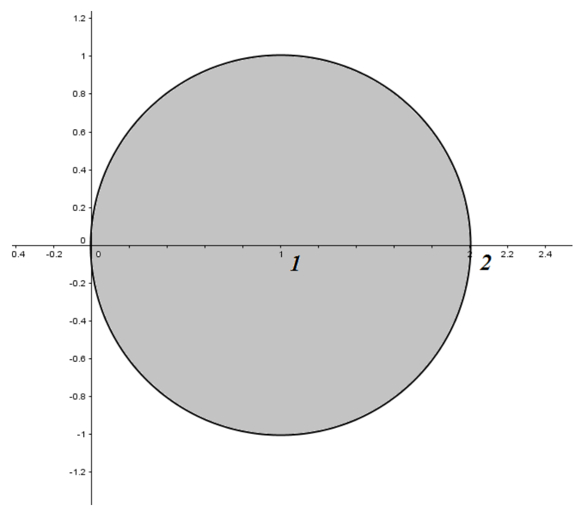
Veamos si converge a lo que queremos.

$$\lim_{z\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{z\to\infty}\left|\frac{(2^{n+2}-1)z^{n+1}}{2^{n+2}}.\frac{2^{n+1}}{(2^{n+1}-1)z^n}\right| = \left|\frac{z}{2}\right|\lim_{z\to\infty}\left|\frac{2^2-1/2^n}{2^2-1/2^n}\right| = |z| < 1$$

La serie funciona.

$c)0 < |z-1| < 1$

Lo que tendremos en esta serie es que por lo menos habrá un solo término de Laurent, de resto véase que tenemos una región de convergencia de serie de Taylor centrada en $z = 1$.



$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{-1+(z-1)} = \frac{-1}{1-(z-1)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$$

En cuanto al término $\frac{1}{z-1}$ él es su propia serie de Laurent

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n - \frac{1}{(z-1)}$$

Respuesta:

$$si \quad 1 < |z| < 2 \quad \rightarrow \quad f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$si \quad |z| < 1 \quad \rightarrow \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$$

$$si \quad 0 < |z-1| < 1 \quad \rightarrow \quad f(z) = -\frac{1}{(z-1)} - \sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$$

Ejercicio 2: *Desarrollar $f(z)$ en las diferentes zonas de convergencia*

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + z - 2}, \qquad a) 0 < |z+2| < 3, \quad b) |z+2| > 3$$

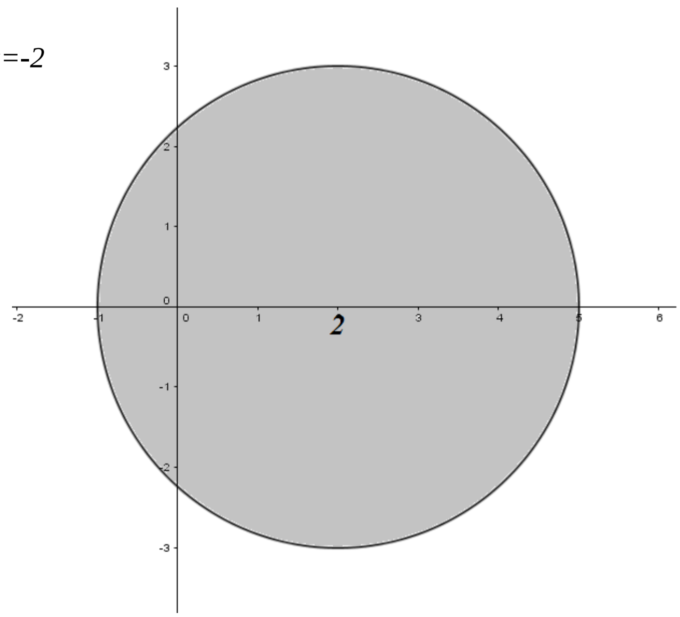
Solución:

Llevo la función a expresarla en fracciones parciales.

$$\frac{z}{z^2+z-2} = \frac{z}{(z+2)(z-1)} = \frac{2}{3(z+2)} + \frac{1}{3(z-1)}$$

$a) 0 < |z+2| < 3$

Empecemos con $\frac{1}{3(z-1)}$, centremos esta expresión en *z=-2*



$$\frac{1}{3(z-1)} = \frac{1}{3}.\frac{1}{(z-1)} = \frac{-1}{3}.\frac{1}{1-(z+2)+2} =$$

$$= \frac{-1}{3}.\frac{1}{3-(z+2)} = \frac{-1}{9}.\frac{1}{1-\left(\frac{z+2}{3}\right)} =$$

$$= \frac{-1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2}{3}\right)^n = \frac{-1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{3^n}$$

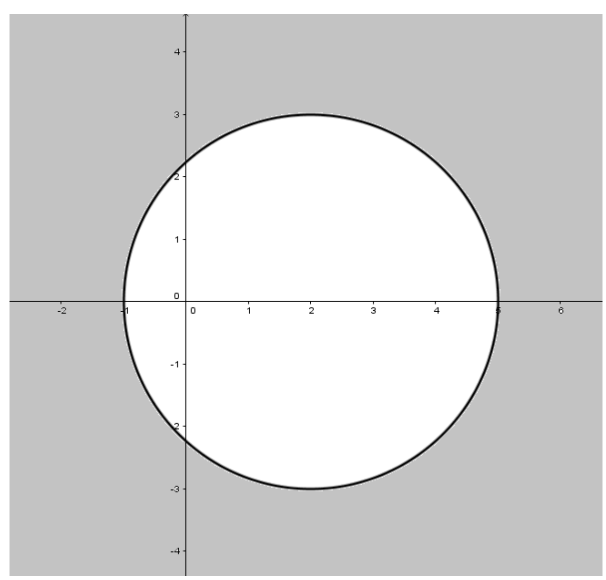
El término $\frac{2}{3(z+2)}$ es su propia serie de Laurent.

$$f(z) = \frac{2}{3(z+2)} - \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{3^n}$$

$b) |z+2| > 3$

Se nos pide una serie de Laurent centrada en *z=2*.

Empecemos centrando el término $\frac{1}{3(z-1)}$ en *z=2*



$$\frac{1}{3(z-1)} = \frac{1}{3(z+2-2-1)} = \frac{1}{3}.\frac{1}{-3+(z+2)} =$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{(z+2).\left(1-\frac{3}{(z+2)}\right)} = \frac{-1}{3(z+2)}.\frac{1}{1-\frac{3}{z+2}} =$$

$$= \frac{-1}{3(z+2)}.\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z+2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{(z+2)^{n+1}}$$

Para el término $\frac{2}{3(z+2)}$ el es su propia serie de Laurent.

$$f(z) = \frac{2}{3(z+2)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(z+2)^{n+1}}$$

Pareciera que hemos terminado, pero esta expresión como tal posee dos términos de la forma $\frac{1}{(z+2)}$, desarrollemos algunos términos de la serie junto con $\frac{2}{3(z+2)}$ y veamos que pasa

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2}{3(z+2)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(z+2)^{n+1}} = \frac{2}{3(z+2)} - \frac{1}{3(z+2)} - \frac{3}{3(z+2)^2} - \frac{3^2}{3(z+2)^3} - \frac{3^3}{3(z+2)^4} - \cdots \\ &= \frac{1}{3(z+2)} - \frac{3}{3(z+2)^2} - \frac{3^2}{3(z+2)^3} - \frac{3^3}{3(z+2)^4} - \frac{3^4}{3(z+2)^5} - \cdots \\ &= \frac{1}{3(z+2)} - \frac{1}{(z+2)^2} - \frac{3}{(z+2)^3} - \frac{3^2}{(z+2)^4} - \frac{3^3}{(z+2)^5} - \cdots = \frac{1}{3(z+2)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(z+2)^{n+1}} \end{aligned}$$

$$f(z) = \frac{1}{3(z+2)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(z+2)^{n+1}}$$

Respuesta:

$$si\ 0 < |z+2| < 3 \quad \rightarrow \quad f(z) = \frac{2}{3(z+2)} - \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{3^n},$$

$$si\ |z+2| > 3 \quad \rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{3(z+2)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(z+2)^{n+1}}$$

Ejercicio 3: *Desarrollar las series de Laurent que aproximen a las funciones $f(z)$ y $g(z)$ alrededor del punto $z = 0$.*

$$f(z) = \frac{senh(\pi z)}{z^4}, \qquad g(z) = \frac{1}{z}.sen^2\left(\frac{1}{2z}\right)$$

Además estudie el punto $z = 0$ y vea los anillos de convergencia.

Solución:

Empecemos con $f(z)$

Se sabe que

$$senh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \ \rightarrow \ senh(\pi z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{2n+1}.z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$f(z) = \frac{1}{z^4}\left[\pi z + \frac{\pi^3 z^3}{3!} + \frac{\pi^5 z^5}{5!} + \frac{\pi^7 z^7}{7!} + \frac{\pi^9 z^9}{9!} + \cdots\right] = \frac{\pi}{z^3} + \frac{\pi^3}{3!\,z} + \frac{\pi^5 z^1}{5!} + \frac{\pi^7 z^3}{7!} + \frac{\pi^9 z^5}{9!} + \cdots =$$

$$= \frac{\pi}{z^3} + \frac{\pi^3}{3!\,z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{2n+5}.z^{2n+1}}{(2n+5)!}$$

Para estudiar el punto *z=0* es recomendables estudiar las sumas de los términos que tienden al infinito

$$f(z) = \frac{\pi}{z^3} + \frac{\pi^3}{3!\,z} + \frac{\pi^5 z^1}{5!} + \frac{\pi^7 z^3}{7!} + \frac{\pi^9 z^5}{9!} + \cdots$$

Pienso ¿Qué potencia de z debo extraer de esta expresión para que quede una función analítica multiplicándola?

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\left[\pi + \pi^3 z^2 + \frac{\pi^5 z^4}{5!} + \frac{\pi^7 z^6}{7!} + \frac{\pi^9 z^8}{9!} + \cdots\right] = \frac{\varphi(z)}{z^3}$$

La función $\frac{\varphi(z)}{z^3}$ tiene un polo de tercer orden en *z=0*, ya que

$$\varphi(0) \neq 0, \infty$$

Estudiemos ahora la convergencia

Los términos de Laurent $\frac{\pi}{z^3} + \frac{\pi^3}{3!z}$ convergen a ellos, para todo valor de z en el plano complejo diferente de cero.

Para la parte de Taylor utilizamos el criterio del cociente

$$\lim_{z\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{z\to\infty}\left|\frac{\pi^{2n}\pi^7 z^{2n} z^3}{(2n+7)!}.\frac{(2n+5)!}{\pi^{2n}\pi^5 z^{2n} z}\right| = |z|.\pi^2 \lim_{z\to\infty}\left|\frac{1}{4n^2+26n+42}\right| = 0 < 1$$

Entonces la serie siempre converge.

Ahora pasemos a $g(z)$

Se sabe

$$sen^2(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}.cos(2z) \ \rightarrow \ sen^2\left(\frac{1}{2z}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}.cos\left(\frac{1}{z}\right)$$

Y además

$$cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . z^{2n}}{(2n)!} \;\rightarrow\; cos\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!\, z^{2n}}$$

Sabiendo esto podemos expresar $g(z)$ de manera diferente

$$sen^2\left(\frac{1}{2z}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}.cos\left(\frac{1}{z}\right) \; = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\, z^{2n}}$$

$$g(z) = \frac{1}{z}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\, z^{2n}}\right] = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{2!\, z^3} + \frac{1}{4!\, z^5} - \frac{1}{6!\, z^7} + \cdots\right] =$$

$$= \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z} + \frac{1}{2.2!\, z^3} - \frac{1}{2.4!\, z^5} + \frac{1}{2.6!\, z^7} - \cdots = \frac{1}{2.2!\, z^3} - \frac{1}{2.4!\, z^5} + \frac{1}{2.6!\, z^7} - \cdots = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!\, z^{2n+1}}$$

$$g(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!\, z^{2n+1}}$$

Estudiemos el punto $z = 0$.

A simple vista podemos ver que no existe una potencia que extraída de los infinitos denominadores de la serie nos deje una $\varphi(z)$ (como en el ejercicio anterior) que en el valor de cero no se vuelva cero o infinito, si pensamos por ejemplo que el valor de 3 pudiera funcionar, tendremos

$$g(z) = \frac{1}{2.2!\, z^3} - \frac{1}{2.4!\, z^5} + \frac{1}{2.6!\, z^7} - \cdots = \frac{1}{z^3}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2.4!\, z^2} + \frac{1}{2.6!\, z^4} - \cdots\right] = \frac{1}{z^3}.\varphi(z)$$

Claramente $\varphi(z)$ arroja infinitas discontinuidades en el valor de cero, entonces 3 no es la potencia, si extraigo 4 tengo el mismo caso, si extraigo 5 tengo el mismo caso, y así sucesivamente, entonces la gran conclusión es que la función $g(z)$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$, causada seguramente por el argumento de la función seno que la compone.

Estudiando la convergencia.

$$\lim_{z\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{z\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(-1)^2}{(2n+2)!\, z^{2n} z^3}.\frac{(2n)!\, z^{2n} z}{(-1)^n(-1)}\right| = \frac{1}{|z^2|}\lim_{z\to\infty}\left|\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\right| = \frac{1}{|z^2|}\lim_{z\to\infty}\left|\frac{1}{4n^2+6n+2}\right| = 0 < 1$$

La serie siempre converge a la función $g(z)$.

Respuesta:

$$f(z) = \frac{\pi}{z^3} + \frac{\pi^3}{3!\, z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{2n+5} . z^{2n+1}}{(2n+5)!}, \qquad \begin{matrix} f(z)\ tiene\ un\ polo\ de\ tercer\ orden\ en\ z = 0 \\ La\ serie\ converge\ para\ todo\ valor\ de\ z \end{matrix}$$

$$g(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!\, z^{2n+1}}, \qquad \begin{matrix} f(z)\ tiene\ una\ singularidad\ esencial\ en\ z = 0 \\ La\ serie\ converge\ para\ todo\ valor\ de\ z \end{matrix}$$

Ejercicio 4:

1. *Hallar la serie de $f(z)$ centrada en $z = \pi/2$ y clasificar $z = \pi/2$.*

$$f(z) = cos^2(z)$$

2. *Estudiar las singularidades de $g(z)$ si la misma se estudiara solo en la rama principal.*

$$g(z) = \frac{sen\left(z - \frac{i\pi}{2}\right)}{(z^4 - 2z^3 + 2z - 1)(e^z - i)}$$

Solución:

Respuesta de 1:

Una vez más debemos utilizar identidades trigonométricas para poder expresar la función en cuestión de manera más simple. Se debe saber que

$$cos^2(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.cos(2z) \quad \rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.cos(2z)$$

Uno quiere valerse de la expresión

$$cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.z^{2n}}{(2n)!}$$

Pero esta es una serie centrada en $z = 0$, entonces no nos ayuda, más sin embargo sabemos que el argumento del coseno va a parar a la expresión de z dentro de la serie, entonces debemos es modificar este argumento para que aparezca lo que queremos, para hacerlo hay que desarrollar y acostumbrarse a la habilidad de sumar un "cero conveniente".

$$cos(2z) = cos\big(2(z+0)\big) = cos\left(2\left(z - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left[2\left(z - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2\pi}{2}\right] = \cos\left[2\left(z - \frac{\pi}{2}\right) + \pi\right]$$

Pensemos $2\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$ como una expresión a solo por un momento y recordemos la siguiente identidad trigonométrica.

$$cos(a+b) = cos(a)\,cos(b) - sen(a)sen(b)$$

$$\cos\left[\left(z - \frac{\pi}{2}\right) + \pi\right] = \cos(a+\pi) = cos(a)\,cos(\pi) - sen(a)sen(\pi) = cos(a)\,cos(\pi) = -cos\left[2\left(z - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Aunque aparezca el factor de 2 multiplicando, téngase presente que al incluirlo en la expresión de la serie no afectará a que esta esté centrada en $z = \pi/2$

$$f(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}.cos\left[2\left(z - \frac{\pi}{2}\right)\right], \qquad cos\left[2\left(z - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.\left(2\left(z - \frac{\pi}{2}\right)\right)^{2n}}{(2n)!}$$

$$f(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.\left(2\left(z - \frac{\pi}{2}\right)\right)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.2^n.\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!}$$

Téngase siempre presente que esos términos que aparezcan sumando, restando o multiplicando a las series (en este caso el $1/2$ y el $1/2$) pueden alterar a la misma de manera significativa, por lo que es necesario desarrollar algunos términos de la serie para ver cómo se comporta el resultado que buscamos.

$$f(z)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[1-\frac{2^2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}+\frac{2^4\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!}-\frac{2^6\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^6}{6!}+\cdots\right]=$$

$$=\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}-\frac{2^3\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!}+\frac{2^5\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^6}{6!}-\cdots\right]=$$

$$=\left[\frac{2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}-\frac{2^3\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!}+\frac{2^5\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^6}{6!}-\cdots\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n.\,2^{2n+1}.\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+2}}{(2+2n)!}$$

Encontramos la serie, pero hace falta estudiar el punto $z=\pi/2$, para esto vemos algunos de los términos que se suman al infinito y vemos que potencia (del término $\left(z-\frac{\pi}{2}\right)$) puedo extraer para que quede multiplicada por una función siempre analítica.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n.\,2^{2n+1}.\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+2}}{(2+2n)!}=\frac{2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}-\frac{2^3\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!}+\frac{2^5\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^6}{6!}-\cdots=$$

$$=\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2.\left[\frac{2}{2!}-\frac{2^3\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}{4!}+\frac{2^5\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^4}{6!}-\cdots\right]$$

Entonces $f(z)$ tiene un cero de segundo orden en $z=\pi/2$.

Respuesta 2:

$$g(z)=\frac{sen\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)}{(z^4-2z^3+2z-1)(e^z-i)}$$

Tenemos que factorizar el polinomio en el denominador de la función para que sea más fácil estudiarlo, se recomienda utilizar el método de Ruffini.

$$g(z)=\frac{sen\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)}{(z-1)^3(z+1)(e^z-i)}$$

Sabemos claramente donde se anulará el denominador para el polinomio, pero nos falta ver donde se anula el término (e^z-i) si es que se anula.

$$e^z-i=0\to e^z=i\to ln(e^z)=ln(i)\to z=\ln(i)\to z=i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$$

Si solo hacemos el estudio para la rama principal

$$z=\frac{i\pi}{2}$$

Empezamos el estudio número por número

$z = 1$

$$g(z) = \frac{1}{(z-1)^3} \cdot \frac{sen\left(z - \frac{i\pi}{2}\right)}{(z+1)(e^z - i)} = \frac{1}{(z-1)^3} \cdot \varphi(z), \qquad \varphi(1) = \frac{sen\left(1 - \frac{i\pi}{2}\right)}{2(e^2 - i)} \neq 0, \infty$$

Entonces *g(z)* tiene un polo de tercer orden en $z = 1$

$z = -1$

$$g(z) = \frac{1}{(z+1)} \cdot \frac{sen\left(z - \frac{i\pi}{2}\right)}{(z-1)^3(e^z - i)} = \frac{1}{(z+1)} \cdot \varphi_2(z), \qquad \varphi_2(-1) = \frac{sen\left(1 + \frac{i\pi}{2}\right)}{8(e^{-1} - i)} \neq 0, \infty$$

Entonces *g(z)* tiene un polo de primer orden en $z = -1$

$z = \frac{i\pi}{2}$

$$g(z) = \frac{1}{(e^z - i)} \cdot \frac{sen\left(z - \frac{i\pi}{2}\right)}{(z-1)^3(z+1)} = \frac{1}{(e^z - i)} \cdot \varphi_3(z), \qquad \varphi_2\left(\frac{i\pi}{2}\right) = \frac{sen\left(\frac{i\pi}{2} - \frac{i\pi}{2}\right)}{\left(\frac{i\pi}{2} - 1\right)^3 \left(\frac{i\pi}{2} + 1\right)} = 0$$

Entonces $z = \frac{i\pi}{2}$ no puede ser polo de $g(z)$.

Lo que suele hacerse en estos casos es tomar el valor que anula al denominador y utilizarlo de manera convencional para seguir estudiando la función (en lo general utilizando series), por ejemplo veo que el numerador tiene un cero en el mismo punto donde se anula el denominador, el numerador puedo desarrollarlo en una serie centrada en el punto problema muy fácilmente, ¿será posible hacerlo también para el denominador, de forma que al final tenga dos ceros (uno abajo y otro arriba) que se cancelen? Este es el razonamiento al que se puede llegar luego de mucha práctica con series y funciones.

Tomamos e^z y la desarrollamos en una serie centrada en $\frac{i\pi}{2}$.

$$e^z = e^{z - \frac{i\pi}{2} + \frac{i\pi}{2}} = e^{\left(z - \frac{i\pi}{2}\right)} \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}, \qquad e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}\right) = i \;\; \rightarrow \;\; e^z = ie^{\left(z - \frac{i\pi}{2}\right)}$$

Se debe saber que

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \;\; \rightarrow \;\; ie^{\left(z - \frac{i\pi}{2}\right)} = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(z - \frac{i\pi}{2}\right)^n}{n!}$$

Si sustituimos esta expresión en $(e^z - i)$ vea lo que ocurre

$$(e^z - i) = -i + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(z - \frac{i\pi}{2}\right)^n}{n!} = -i + i\left[1 + \frac{\left(z - \frac{i\pi}{2}\right)^1}{1!} + \frac{\left(z - \frac{i\pi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(z - \frac{i\pi}{2}\right)^3}{3!} + \cdots\right] =$$

$$= \left[-i + i + \frac{i\left(z - \frac{i\pi}{2}\right)^1}{1!} + \frac{i\left(z - \frac{i\pi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{i\left(z - \frac{i\pi}{2}\right)^3}{3!} + \cdots\right] =$$

$$= \left[\frac{i\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)}{1!}+\frac{i\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)^2}{2!}+\frac{i\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)^3}{3!}+\cdots\right]$$

Veo que puedo sacar un cero de la expresión

$$(e^z-i)=i\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)\left[1+\frac{i\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)}{2!}+\frac{i\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)^2}{3!}+\cdots\right]$$

Ahora expreso el numerador como una serie

$$sen\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n.\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\left[\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)-\frac{\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)^3}{3!}+\frac{\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)^5}{5!}-\frac{\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)^7}{7!}+\cdots\right]=$$

$$sen\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)=\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)\left[1-\frac{\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)^2}{3!}+\frac{\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)^4}{5!}-\frac{\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)^6}{7!}+\cdots\right]$$

Con toda esta información rearmamos la función

$$g(z)=\frac{\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)\left[1-\frac{\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)^2}{3!}+\frac{\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)^4}{5!}-\frac{\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)^6}{7!}+\cdots\right]}{i(z-1)^3(z+1)\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)\left[1+\frac{i\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)}{2!}+\frac{i\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)^2}{3!}+\cdots\right]}=$$

$$=\frac{\left[1-\frac{\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)^2}{3!}+\frac{\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)^4}{5!}-\frac{\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)^6}{7!}+\cdots\right]}{i(z-1)^3(z+1)\left[1+\frac{i\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)}{2!}+\frac{i\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)^2}{3!}+\cdots\right]}$$

$g(z)$ tiene una discontinuidad removible en $z=\frac{i\pi}{2}$

Respuesta:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n.\,2^{2n+1}.\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+2}}{(2+2n)!},\qquad f(z)\ tiene\ un\ cero\ de\ segundo\ orden\ en\ z=\pi/2$$

$$g(z) tiene\ un\ polo\ de\ tercer\ orden\ en\ z=1$$
$$g(z) tiene\ un\ polo\ de\ primer\ orden\ en\ z=-1$$
$$g(z) tiene\ una\ singularidad\ removible\ en\ z=\frac{i\pi}{2}$$

Ejercicio 5: *Hallar los anillos de convergencia de las* 4 *series presentadas a continuación, y encontrar a que convergen las series* 3 *y* 4.

$$1.)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2.(z-2+i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2+i)^n}{1+in} \qquad 2.)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(in)}{(z-i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n!}$$

$$3.)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(z+1)^n} \qquad 4.)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{(iz)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\pi^n}$$

Solución:

Serie $1.)$

Empezamos con la parte de Laurent

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2.(z-2+i)^n}{(n+1)^2.(z-2+i).(z-2+i)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2}{(n+1)^2.(z-2+i)}\right|=$$

$$=\frac{1}{|z-2+i|}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right|=\frac{1}{|z-2+i|}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2}{n^2+2n+1}\right|=\frac{1}{|z-2+i|}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2}{n^2+2n+1}\right|=$$

$$=\frac{1}{|z-2+i|}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1+{}^{2}/_{n}+{}^{1}/_{n^2}}\right|=\frac{1}{|z-2+i|}<1\ \ \rightarrow |\boldsymbol{z}-\mathbf{2}+\boldsymbol{i}|>1$$

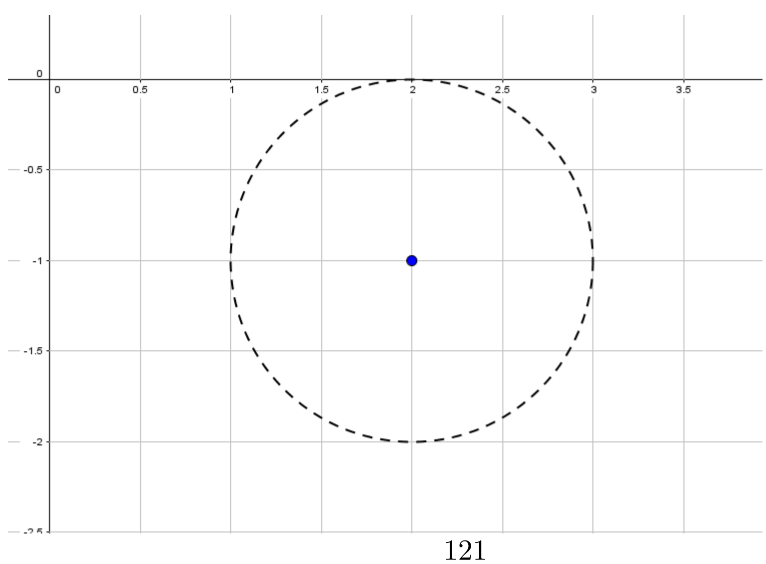
Ahora la parte de Taylor

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z-2+i)^n.(1+in).(z-2+i)}{(1+in+i).(z-2+i)^n}\right|=|z-2+i|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+in}{1+i+in}\right|=$$

$$=|z-2+i|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+in}{1+i+in}\right|==|z-2+i|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{{}^{1}/_{n}+i}{{}^{1}/_{n}+{}^{i}/_{n}+i}\right|=|z-2+i|<1\ \ \rightarrow\ \ |\boldsymbol{z}-\mathbf{2}+\boldsymbol{i}|<1$$

$$1<|z-2+i|<1\ \ \rightarrow\ \ |z-2+i|=1$$

De este resultado se puede decir que sabemos que la serie converge, pero no se sabe si absolutamente. La serie converge en un anillo centrado en *2-i* de radio 1.



Serie 2.)

Parte de Laurent

$$sen(in) = isenh(n) \;\rightarrow\; \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{i.senh(n+1).(z-i)^n}{i.senh(n).(z-i).(z-i)^n}\right| = \frac{1}{|z-i|}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{senh(n+1)}{senh(n)}\right| =$$

$$= \frac{1}{|z-i|}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^n e - e^{-n}e^{-1}}{e^n - e^{-n}}\right| = \frac{1}{|z-i|}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{2n}-1}{e(e^{2n}-1)}\right| = \frac{1}{|z-i|}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^2 - {}^1/_{e^{2n}}}{e\left(1-{}^1/_{e^{2n}}\right)}\right| = \frac{e}{|z-i|} < 1 \rightarrow$$

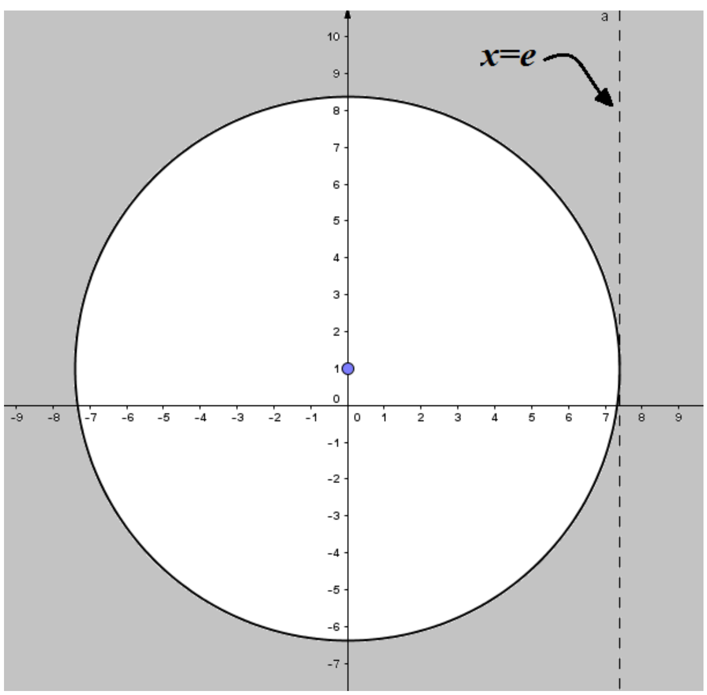
$$\rightarrow \boldsymbol{|z-i|} > e$$

Parte de Taylor

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z-i)^n.(z-i).n!}{(n+1)!\,(z-i)^n}\right| = |z-i|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = |z-i|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1).n!}\right| = |z-i|.0 < 1$$

De este resultado final se tiene que la serie converge siempre, esto es porque si se ve bien la parte de Taylor converge a la función $e^{(z-i)}$ la cuál converge en el todo el plano complejo.

Interceptando ambas zonas de convergencia, tenemos

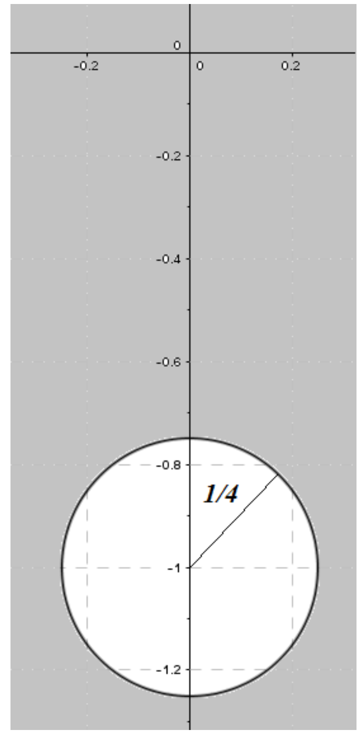


Serie 3.)

Convergencia

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{4^n.(z+1)^n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4.|z+1|} = \frac{1}{4.|z+1|} < 1 \;\;\rightarrow\;\; \boldsymbol{\frac{1}{4} < |z+1|}$$

Para hallar a qué función converge la serie, hay que modelarla de tal manera que se asemeje a una de las series notables conocidas.



$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(z+1)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4(z+1)}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{4(z+1)}}=$$

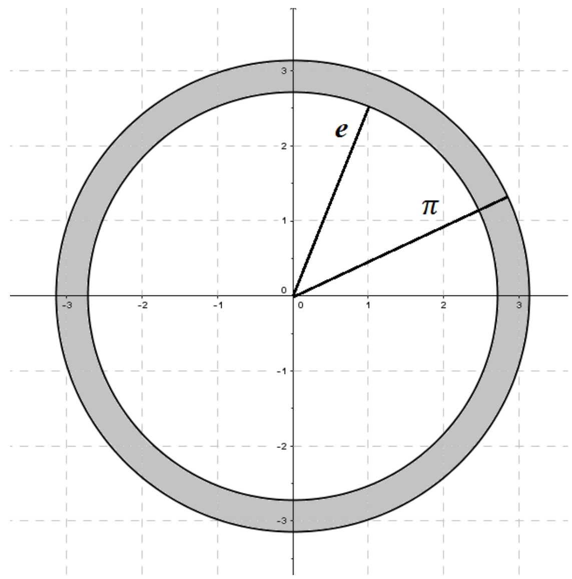
$$=\frac{4(z+1)}{4(z+1)-1}=\boldsymbol{\frac{4z+4}{4z+3}}$$

Serie 4.)

Convergencia

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{e}{iz}\right)^n\right|}=\frac{e}{|z|}<1 \;\;\rightarrow\;\; \boldsymbol{|z|>e}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{e}{iz}\right)^n\right|}=\frac{|z|}{\pi}<1 \;\;\rightarrow\;\; \boldsymbol{|z|<\pi}$$



Función a la que converge

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{(iz)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\pi^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{iz}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\pi}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{e}{iz}}+\frac{1}{1-\frac{z}{\pi}}=$$

$$=\frac{iez-z^2}{z^2+e^2}+\frac{\pi}{\pi-z}=\boldsymbol{\frac{z^3-iez^2+i\pi ez+e^2\pi}{e^2\pi-e^2z+\pi z^2-z^3}}$$

Respuesta:

Serie 1.)

$$|z-2+i|=1$$

Serie 2.)

$$|z-i|>e$$

Serie 3.)

$$|z+1|>\frac{1}{4}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(z+1)^n}=\frac{4z+4}{4z+3}$$

Serie 4.)

$$e<|z|<\pi, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{(iz)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\pi^n}=\frac{z^3-iez^2+i\pi ez+e^2\pi}{e^2\pi-e^2z+\pi z^2-z^3}$$

Ejercicio 6: *Hallar el carácter del punto $z = 0$ en $f(z)$ y $g(z)$*

$$f(z) = \frac{sen(z)}{e^{-z} + z - 1}, \qquad g(z) = \frac{z\left(e^{z^2} - 1\right)}{cos(z) - cos^2(z)}$$

Solución:

Estudiemos primero $f(z)$

$$sen(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \left[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right] = z\left[1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots\right]$$

$$e^{-z} = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\, z^n} = \left[1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\, z^2} + \frac{1}{3!\, z^3} + \cdots\right]$$

Expresemos $f(z)$ con estas series

$$f(z) = \frac{z\left[1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots\right]}{\left[1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\, z^2} + \frac{1}{3!\, z^3} + \cdots\right] + z - 1} = \frac{z\left[1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots\right]}{\left[z + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\, z^2} + \frac{1}{3!\, z^3} + \cdots\right]} = \frac{z\left[1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots\right]}{z\left[1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!\, z^3} + \frac{1}{3!\, z^4} + \cdots\right]}$$

$$f(z) = \frac{\left[1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots\right]}{\left[1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!\, z^3} + \frac{1}{3!\, z^4} + \cdots\right]}$$

Como no existe potencia que extraída del denominador nos deje una función analítica en $z = 0$, entonces $f(z)$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$.

Ahora estudiemos $g(z)$

$$cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . z^{2n}}{(2n)!} = \left[1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right], \qquad e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} = \left[1 + \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{4!} + \cdots\right]$$

$$cos^2(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\cos(2z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . 2^{2n} . z^{2n}}{(2n)!} = \left[1 - \frac{2^2 . z^2}{2!} + \frac{2^4 . z^4}{4!} - \frac{2^6 . z^6}{6!} + \cdots\right]$$

Rearmando $g(z)$

$$g(z) = \frac{z\left[\left[1 + \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{4!} + \cdots\right] - 1\right]}{\left[1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right] - \left[1 - \frac{2^2 . z^2}{2!} + \frac{2^4 . z^4}{4!} - \frac{2^6 . z^6}{6!} + \cdots\right]} =$$

$$= \frac{z\left[\frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{4!} + \cdots\right]}{\left[-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right] + \left[\frac{2^2 . z^2}{2!} - \frac{2^4 . z^4}{4!} + \frac{2^6 . z^6}{6!} - \cdots\right]} =$$

$$= \frac{z^3\left[\frac{1}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right]}{\left[\left(\frac{2^2}{2!} - \frac{1}{2!}\right)z^2 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{2^4}{4!}\right)z^4 + \left(\frac{2^6}{6!} - \frac{1}{6!}\right)z^6 + \cdots\right]} =$$

$$= \frac{z^3\left[\frac{1}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\right]}{z^2\left[\left(\frac{2^2}{2!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{4!}-\frac{2^4}{4!}\right)z^2+\left(\frac{2^6}{6!}-\frac{1}{6!}\right)z^4+\cdots\right]} = \frac{z\left[\frac{1}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\right]}{\left[\left(\frac{2^2}{2!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{4!}-\frac{2^4}{4!}\right)z^2+\left(\frac{2^6}{6!}-\frac{1}{6!}\right)z^4+\cdots\right]}$$

$$g(z) = \frac{z.\left[\frac{1}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\right]}{\left[\left(\frac{2^2}{2!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{4!}-\frac{2^4}{4!}\right)z^2+\left(\frac{2^6}{6!}-\frac{1}{6!}\right)z^4+\cdots\right]} = z.\varphi(z)$$

Vea que $\varphi(0) \neq 0, \infty$

Entonces, $g(z)$ tiene un cero de primer orden en $z = 0$

Respuesta:

$$f(z)\ tiene\ una\ singularidad\ esencial\ en\ z = 0$$

$$g(z)\ tiene\ un\ cero\ de\ primer\ orden\ en\ z = 0$$

Integrales complejas por el método de los residuos

Ejercicio 1: *Sea*

$$f(z) = \frac{z}{1 - cos(\pi z)}$$

Hallar y clasificar los puntos singulares de $f(z)$, calcular los residuos en tales puntos y por último calcular la siguiente integral

$$\oint\limits_{|z-1|=2} f(z)dz$$

Donde la curva $|z-1| = 2$ se recorre en sentido anti horario.

Solución:

Supongamos que queremos estudiar el punto $z = 0$, desarrollo entonces la serie del coseno tal cuál lo tenemos centrada en ese punto.

$$cos(\pi z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi z)^{2n}}{(2n)!} = \left[1 - \frac{\pi^2 z^2}{2!} + \frac{\pi^4 z^4}{4!} - \frac{\pi^6 z^6}{6!} + \ldots\right]$$

Entonces

$$f(z) = \frac{z}{1 - \left[1 - \frac{\pi^2 z^2}{2!} + \frac{\pi^4 z^4}{4!} - \frac{\pi^6 z^6}{6!} + \ldots\right]} = \frac{z}{1 - 1 + \frac{\pi^2 z^2}{2!} - \frac{\pi^4 z^4}{4!} + \frac{\pi^6 z^6}{6!} - \ldots} =$$

$$= \frac{z}{z^2\left[\frac{\pi^2}{2!} - \frac{\pi^4 z^2}{4!} + \frac{\pi^6 z^4}{6!} - \ldots\right]} = \frac{1}{z\left[\frac{\pi^2}{2!} - \frac{\pi^4 z^2}{4!} + \frac{\pi^6 z^4}{6!} - \ldots\right]} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\left[\frac{\pi^2}{2!} - \frac{\pi^4 z^2}{4!} + \frac{\pi^6 z^4}{6!} - \ldots\right]} = \frac{1}{z} \cdot \varphi(z),$$

$$\varphi(0) \neq 0, \infty$$

Entonces $f(z)$ tiene un polo simple en $z = 0$. Supongamos que ahora queremos estudiar el denominador de manera completa, saber donde este se hace cero.

$$1 - cos(\pi z) = 0 \;\Rightarrow\; cos(\pi z) = 1 \;\text{ recordando que: } cos^{-1}(z) = -i.ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \;\Rightarrow\; z = 2n,\; n \in \mathbb{Z}$$

Entonces el denominador de $f(z)$ se anula en infinitos puntos todos ellos agrupados dentro de la expresión $z = 2n,\; n \in \mathbb{Z}$. De igual manera la función contará con infinitos residuos (uno para cada polo) pero nos bastará con encontrar solo uno, a priori no sabemos exactamente de que grado son los polos con los que cuenta la función. Ahora bien, el denominador tiene que poder expresarse de manera útil para poder utilizar la fórmula de los residuos, ya que desarrollar la serie que aproxime a toda la fución en $z = 2n$ sera muy complicado, desarrollo en cambio una serie que me aproxime al denominador y la centro en el punto problema $z = 2n$ (que son infinitos puntos problema).

$$f(z) = \frac{1}{1 - cos(\pi z)} = \frac{z}{1 - cos\left[\pi(z - 2n + 2n)\right]} = \frac{z}{1 - cos\left[\pi(z - 2n) + 2\pi n\right]} = \frac{z}{1 - cos\left(a + 2\pi n\right)}$$

$$cos(a + 2\pi n) = cos(a)cos(2\pi n) - sen(a)sen(2\pi n),\; cos(2\pi n) = 1,\; sen(2\pi n) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; cos(a + 2\pi n) = cos(a) = cos(\pi(z - 2n))$$

Desarrollando la serie de este coseno

$$cos(\pi(z - 2n)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [\pi(z - 2n)]^2 n}{(2n!)} = \left[1 - \frac{\pi^2 (z - 2n)^2}{2!} + \frac{\pi^4 (z - 2n)^4}{4!} - \frac{\pi^6 (z - 2n)^6}{6!} + \ldots\right]$$

Entonces

$$f(z) = \frac{z}{1 - \left[1 - \frac{\pi^2 (z-2n)^2}{2!} + \frac{\pi^4 (z-2n)^4}{4!} - \frac{\pi^6 (z-2n)^6}{6!} + \ldots\right]} = \frac{z}{1 - 1 + \frac{\pi^2 (z-2n)^2}{2!} - \frac{\pi^4 (z-2n)^4}{4!} + \frac{\pi^6 (z-2n)^6}{6!} - \ldots} =$$

$$= \frac{z}{\frac{\pi^2(z-2n)^2}{2!} - \frac{\pi^4(z-2n)^4}{4!} + \frac{\pi^6(z-2n)^6}{6!} - \ldots} = \frac{z}{(z-2n)^2\left[\frac{\pi^2}{2!} - \frac{\pi^4(z-2n)^2}{4!} + \frac{\pi^6(z-2n)^4}{6!} - \ldots\right]} =$$

$$= \frac{z}{(z-2n)^2} \cdot \frac{1}{\left[\frac{\pi^2}{2!} - \frac{\pi^4(z-2n)^2}{4!} + \frac{\pi^6(z-2n)^4}{6!} - \ldots\right]} = \frac{1}{(z-2n)^2} \cdot \varphi(z)$$

Es importante ver que $\varphi(2n) \neq 0, \infty$.ahora sabemos que $f(z)$ cuenta con infinitos polos de segundo orden en el número $z = 2n,\ n \in \mathbb{Z} - \{0\}$,tenga presente que con la función expresada de esta forma, es posible utilizar la fórmula de los residuos.

$$\underset{z=z_0}{Res} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z-z_0)^k f(z)\right],\ \text{donde } k \text{ es el orden del polo.}$$

Para nuestro caso

$$\underset{z=2n}{Res} f(z) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 2n} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z-2n)^2 z}{(z-2n)^2\left[\frac{\pi^2}{2!} - \frac{\pi^4(z-2n)^2}{4!} + \frac{\pi^6(z-2n)^4}{6!} - \ldots\right]}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to 2n} \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{\left[\frac{\pi^2}{2!} - \frac{\pi^4(z-2n)^2}{4!} + \frac{\pi^6(z-2n)^4}{6!} - \ldots\right]}\right] = \frac{1}{2} \lim_{z \to 2n} \frac{d}{dz} \frac{z}{\left[\frac{\pi^2}{2} + \varphi(z-2n)\right]},$$

Derivemos el argumento del límite

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{\left[\frac{\pi^2}{2} + \varphi(z-2n)\right]}\right] = \frac{\left[\frac{\pi^2}{2} + \varphi(z-2n)\right] - z\left[\varphi'(z-2n)\right]}{\left[\frac{\pi^2}{2} + \varphi(z-2n)\right]^2}$$

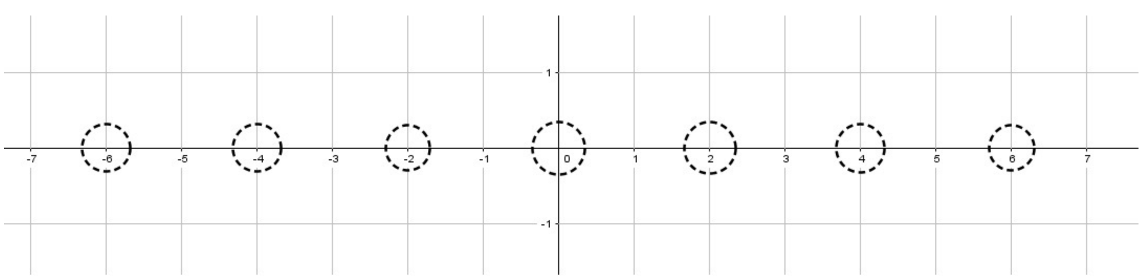
Finalmente

$$\underset{z=2n}{Res} f(z) = \frac{1}{2} \lim_{z \to 2n} \frac{\left[\frac{\pi^2}{2} + \varphi(z-2n)\right] - z\left[\varphi'(z-2n)\right]}{\left[\frac{\pi^2}{2} + \varphi(z-2n)\right]^2} = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{4}{\pi^4} = \frac{2}{\pi^2}$$

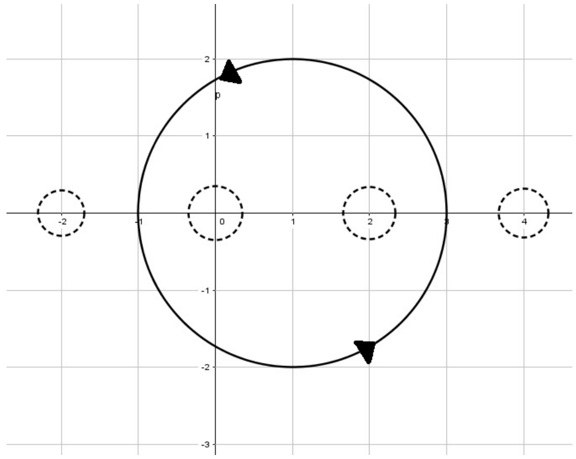
ahora busquemos el resíduo del polo simple en $z = 0$

$$\underset{z=0}{Res} = \frac{1}{0!} \lim_{z \to 0} \frac{z}{z\left[\frac{\pi^2}{2!} - \frac{\pi^4 z^2}{4!} + \frac{\pi^6 z^4}{6!} - \ldots\right]} = \frac{2}{\pi^2}$$

veamos gráficamente donde están los puntos de discontinuidad



ahora evaluemos la región de integración que se pide



Como la región de integración abarca dos puntos de discontinuidad, entonces serán dos residuos que deberán considerarse y sumarse, finalmente.

$$\oint_{|z-1|=2} f(z)dz = 2\pi i\left(\frac{2}{\pi^2}+\frac{2}{\pi^2}\right) = \frac{i8}{\pi}$$

Respuesta:

La función $f(z)$ tiene un polo simple en $z=0$ y además tiene infinitos polos de segundo orden en $z=2n,\ n\in \mathbb{Z}-\{0\}$.

Los residuos para cada punto singular de $f(z)$ són: $Resf(z) = \frac{2}{\pi^2}$.

Por útimo la integral

$$\oint\limits_{|z-1|=2} f(z) = \frac{i8}{\pi}$$

.

Ejercicio 2: *Calcular la siguiente integral*

$$\oint_{|z|=2} tan(z)\ dz$$

Solución:

Tengamos presente

$$f(z) = tan(z) = \frac{sen(z)}{cos(z)}$$

Estudiemos cuando se anula el denominador, es decir, cuándo $cos(z) = 0$, entonces

$$cos(z) = 0 \ \Rightarrow \ \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \ \Rightarrow \ e^{iz} = \frac{-1}{e^{iz}} \ \Rightarrow \ e^{i2z} = -1 \ \Rightarrow \ i2z = ln(-1) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ i2z = ln|1| + i(arg(-1) + 2k\pi) \ \Rightarrow \ i2z = i(-\pi + 2k\pi) \ \Rightarrow \ z = \frac{\pi}{2}(2k-1), \ k \in \mathbb{Z}$$

Ya sabemos donde se anula el denominador (en infinitos puntos de la forma $z = \frac{\pi}{2}(2k-1), \ k \in \mathbb{Z}$), nuestra experiencia nos dice que ahora tomemos el coseno del denominador y lo centremos en el punto donde está su discontinuidad.

$$cos(z) = cos\left(z - \frac{\pi}{2}(2k-1) + \frac{\pi}{2}(2k-1)\right) = cos\left[\left(z - \frac{\pi}{2}(2k-1)\right) + \frac{\pi}{2}(2k-1)\right] =$$

$$= cos\left(a + \frac{\pi}{2}(2k-1)\right)$$

$$cos\left(a + \frac{\pi}{2}(2k-1)\right) = cos(a)cos\left(\frac{\pi}{2}(2k-1)\right) - sen(a)sen\left(\frac{\pi}{2}(2k-1)\right)$$

$$cos\left(\frac{\pi}{2}(2k-1)\right) = 0, \ sen\left(\frac{\pi}{2}(2k-1)\right) = (-1)^k, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$cos\left(a + \frac{\pi}{2}(2k-1)\right) = -(-1)^k sen\,(a) = (-1)^{k+1} sen\left(z - \frac{\pi}{2}(2k-1)\right)$$

$$f(z) = \frac{sen(z)}{(-1)^{k+1} sen\left(z - \frac{\pi}{2}(2k-1)\right)} = \frac{(-1)^{k+1} sen(z)}{sen\left(z - \frac{\pi}{2}(2k-1)\right)}$$

Desarrollamos la serie del denominador

$$sen\left(z - \frac{\pi}{2}(2k-1)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(z - \frac{\pi}{2}(2k-1)\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \frac{\left(z - \frac{\pi}{2}(2k-1)\right)}{1!} - \frac{\left(z - \frac{\pi}{2}(2k-1)\right)^3}{3!} + \frac{\left(z - \frac{\pi}{2}(2k-1)\right)^5}{5!} - \dots$$

Entonces la función original puede expresarse como sigue

$$f(z) = \frac{(-1)^{k+1} sen(z)}{\left[\left(z - \frac{\pi}{2}(2k-1)\right) - \frac{\left(z-\frac{\pi}{2}(2k-1)\right)^3}{3!} + \frac{\left(z-\frac{\pi}{2}(2k-1)\right)^5}{5!} - \dots\right]}$$

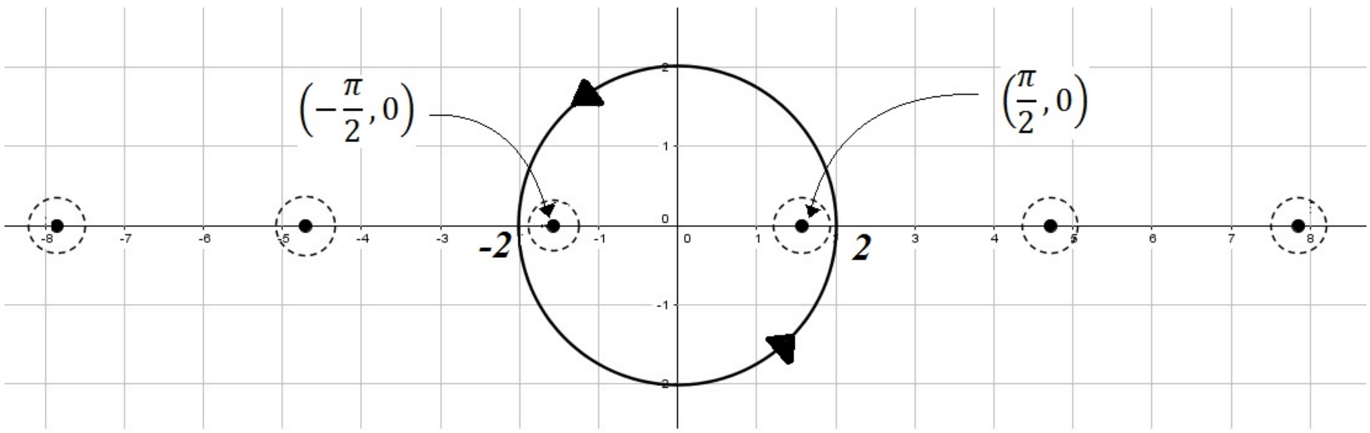
$$= \frac{(-1)^{k+1} sen(z)}{\left(z - \frac{\pi}{2}(2k-1)\right)\left[1 - \frac{\left(z-\frac{\pi}{2}(2k-1)\right)^2}{3!} + \frac{\left(z-\frac{\pi}{2}(2k-1)\right)^4}{5!} - \dots\right]} =$$

Con todo este análisis podemos ver que la función tiene un polo de primer orden en $z = \left(\frac{\pi}{2}(2k-1)\right)$. utilizamos la fórmula de los residuos y tenemos

$$\underset{z=\frac{\pi}{2}(2k-1)}{Res} f(z) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}(2k-1)} \frac{\left(z-\frac{\pi}{2}(2k-1)\right)(-1)^{k+1}sen(z)}{\left(z-\frac{\pi}{2}(2k-1)\right)\left[1-\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}(2k-1)\right)^2}{3!}+\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}(2k-1)\right)^4}{5!}-\dots\right]} =$$

$$= \lim_{z\to\frac{\pi}{2}(2k-1)} \frac{(-1)^{k+1}sen(z)}{\left[1-\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}(2k-1)\right)^2}{3!}+\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}(2k-1)\right)^4}{5!}-\dots\right]} = \frac{(-1)^{k+1}sen(\frac{\pi}{2}(2k-1))}{1-0} = (-1)^{2k+1} = -1$$

Así los residuos para cada punto de discontinuidad valen -1. Veamos como es la región de integración.



Dos puntos de discontinuidad, dos residuos que deberán sumarse

$$\oint_{|z|=2} tan(z)\ dz = i2\pi\,(-1-1) = -i4\pi$$

Respuesta:

$$\oint_{|z|=2} tan(z)\ dz = -i4\pi$$

Ejercicio 3: *Calcular la siguiente integral*

$$I = \oint\limits_{|z-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{i\pi}{2}\right)|=1} \frac{sen(z)sen(z-1)}{z^2-z}dz$$

Solución:

$$f(z) = \frac{sen(z)sen(z-1)}{z^2-z} = \frac{\left[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5}! - \dots\right]\left[(z-1) - \frac{(z-1)^3}{3!} + \frac{(z-1)^5}{5!} - \dots\right]}{z(z-1)} =$$

$$= \frac{z\left[1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right](z-1)\left[1 - \frac{(z-1)^2}{3!} + \frac{(z-1)^4}{5!} - \dots\right]}{z(z-1)} =$$

$$= \left[1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right]\left[1 - \frac{(z-1)^2}{3!} + \frac{(z-1)^4}{5!} - \dots\right]$$

No existen residuos, por lo tanto la función es analítica dentro de la región de integración la cuál no hace falta dibujar.

Respuesta:

$$I = 0$$

Calcular la siguiente integral

$$I = \oint\limits_{|z|=1} ze^{\frac{1}{z}}$$

Solución:

Véase que la función $e^{\frac{1}{z}}$ del integrando tiene una singularidad esencial en cero y además está multiplicada por un factor de z, esto puede confundirnos, entonces desarrollamos la serie de la función trascendente y luego la multiplicamos por el factor de z.

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} = \left[1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots\right] \Rightarrow ze^{\frac{1}{z}} = \left[z + 1 + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!z^2} + \dots\right]$$

Vemos entonces que la función del integrando tiene un singularidad esencial en $z = 0$. La verdad no hace falta ver la región de integración. Solo hace falta saber identificar el residuo de la serie.

$$\underset{z=0}{Res} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow I = i2\pi \cdot \frac{1}{2}$$

Respuesta:

$$I = i\pi$$

Ejercicio 4: *Calcular la siguiente integral compleja*

$$I = \oint_{|z+\frac{1}{2}|=1} \frac{sen(z-1)}{z^4-(1+i)z^2+i}\, dz$$

Solución:

Lo primero que debemos hacer es encontrar los polos de la función del integrando, para esto es necesario factorizar el denominador.

$$f(z) = \frac{sen(z-1)}{z^4-(1+i)z^2+i}$$

$$z^4-(1+i)z^2+i=0, \text{ sea } z^2=w \;\Rightarrow\; w^2-(1+i)w+i=0 \;\Rightarrow\; w=\frac{(1+i)\pm\sqrt{(1+i)^2-4{,}1.i}}{2},$$

$$(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i \;\Rightarrow\; w=\frac{(1+i)\pm\sqrt{2i-4i}}{2}=\frac{(1+i)\pm\sqrt{-2i}}{2}=\frac{(1+i)\pm i\sqrt{2i}}{2},$$

$$\text{Sea } u=i2 \;\Rightarrow\; u=2cis\left(\frac{\pi}{2}\right) \;\Rightarrow\; u^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}.cis\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}.cis\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=(1+i)$$

$$w=\frac{(1+i)\pm i(1+i)}{2}=\frac{(1+i)\pm(-1+i)}{2}=\begin{cases} w_1 = i \\ w_2 = 1 \end{cases}$$

$$z^4-(1+i)z^2+i \;\Rightarrow\; w^2-(1+i)w+i=0 \;\Rightarrow\; (w-i)(w-1)=0 \;\Rightarrow\; \left(z^2-i\right)\left(z^2-1\right)=0$$

$$\begin{cases} z^2-i=0 \;\Rightarrow\; z^2=1 \;\Rightarrow\; z=\pm\sqrt{i} \\ z^2-1=0 \;\Rightarrow\; z^2=1 \;\Rightarrow\; z=\pm 1 \;\Rightarrow\; (z+1)(z-1)=0 \end{cases}$$

$$\text{Sea } v=i \;\Rightarrow\; v=e^{\frac{i\pi}{2}} \;\Rightarrow\; v\frac{1}{2}=\left(v=e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{i\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z=\pm\sqrt{i} \;\Rightarrow\; z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow\; \left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$$

$$z^4-(1+i)z^2+i=(z-1)(z+1)\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f(z)=\frac{sen(z-1)}{(z-1)(z+1)\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{\left[(z-1)-\frac{(z-1)^3}{3!}+\frac{(z-1)^5}{5!}-\dots\right]}{(z-1)(z+1)\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=$$

$$=\frac{(z-1)\left[1-\frac{(z-1)^2}{3!}+\frac{(z-1)^4}{5!}-\dots\right]}{(z-1)(z+1)\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{\left[1-\frac{(z-1)^2}{3!}+\frac{(z-1)^4}{5!}-\dots\right]}{(z+1)\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

La función $f(z)$ tiene una singularidad removible en

$$z=1$$

Y además cuenta con tres polos simples (o de primer orden) en

$$\begin{cases} z=-1 \\ z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z=\frac{-\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Empecemos a calcular los residuos de cada polo

$$\underset{z=-1}{Res}\, f(z)=\lim_{z\to -1}\frac{(z+1)sen(z-1)}{(z-1)(z+1)\left(z^2-i\right)}=\frac{-sen(2)}{(-2)(1-i)}=\frac{sen(2)}{2(1-i)}=\frac{sen(2)(1+i)}{2\left(1^2+1^2\right)}=\boldsymbol{\frac{sen(2)(1+i)}{4}}$$

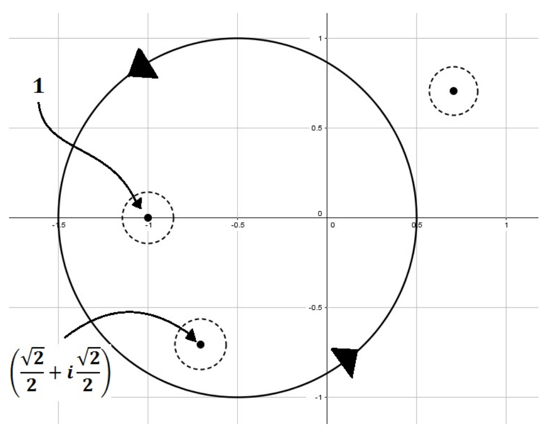
$$\underset{z=\frac{-\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}}{Res} f(z)=\frac{\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)sen(z-1)}{\left(z^2-1\right)\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{sen(z-1)}{\left(z^2-1\right)\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=$$

$$=\frac{sen\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)}{\left[\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-1\right]\left(-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)}=\frac{sen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)}{(1-i)(1+i)\sqrt{2}}=\frac{sen\left(e^{\frac{i\pi}{4}}+1\right)}{-2\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{-\sqrt{2}sen\left(e^{\frac{i\pi}{4}}+1\right)}{4}}$$

$$\underset{z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}{Res} f(z)=\frac{\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)sen(z-1)}{\left(z^2-1\right)\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{sen(z-1)}{\left(z^2-1\right)\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=$$

$$=\frac{sen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)}{\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-1\right]\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)}=\frac{sen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)}{-(1-i)(1+i)\sqrt{2}}=\frac{sen\left(e^{\frac{i\pi}{4}}-1\right)}{-2\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{-\sqrt{2}sen\left(e^{\frac{i\pi}{4}}-1\right)}{4}}$$

Dibujando la región de integración



$$I=i2\pi\left(\frac{sen(2)}{4}(1+i)-\frac{\sqrt{2}sen\left(e^{\frac{i\pi}{4}}+1\right)}{4}\right)=\frac{i\pi}{2}\left(sen(2)(1+i)-\sqrt{2}sen\left(e^{\frac{i\pi}{4}}+1\right)\right)$$

Respuesta:

$$\oint\limits_{|z+\frac{1}{2}|=1}\frac{sen(z-1)}{z^4-(1+i)z^2+i}=\frac{i\pi}{2}\left(sen(2)(1+i)-\sqrt{2}sen\left(e^{\frac{i\pi}{4}}+1\right)\right)$$

Integrales complejas por la fórmula integral de Cauchy

Ejercicio 1: *Calcular la siguiente integral*

$$\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{cosh\left(e^{i\pi z}\right)}{z^3-4z^2}\ dz$$

Solución

Factorizamos el denominador

$$z^3-4z^2=z^2(z-4)$$

Véa lo que haremos con la función

$$\frac{cosh\left(e^{i\pi z}\right)}{z^3-4z^2}=cosh\left(e^{i\pi z}\right)\cdot\frac{1}{z^2(z-4)}$$

Ahora, excluyendo la función trascendente, desarrollamos las fracciones parciales de $\frac{1}{z^2(z-4)}$.

$$\frac{1}{z^2(z-4)}=\frac{a}{z}+\frac{b}{z^2}+\frac{c}{z-4}\ \Rightarrow\ 1=z(z-4)a+(z-4)b+z^2c\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 1=az^2-4az+bz-4b+cz^2\ \Rightarrow\ 1=(a+c)z^2+(b-4a)z-4b\Rightarrow$$

$$-4b=1\ \Rightarrow\ b=\tfrac{-1}{4}$$
$$a+c=0\ \Rightarrow\ c=\tfrac{1}{16}$$
$$b-4a=0\ \Rightarrow\ \tfrac{-1}{4}-4a=0\ \Rightarrow\ 4a=\tfrac{-1}{4}\Rightarrow\ a=\tfrac{-1}{16}$$
$$\frac{1}{z^2(z-4)}=\frac{-1}{16z}-\frac{1}{4z^2}+\frac{1}{16(z-4)}$$

Entonces

$$f(z)=cosh\left(e^{i\pi z}\right)\cdot\left(\frac{-1}{16z}-\frac{1}{4z^2}+\frac{1}{16(z-4)}\right)=\frac{cosh\left(e^{i\pi z}\right)}{16(z-4)}-\frac{cosh\left(e^{i\pi z}\right)}{16z}-\frac{cosh\left(e^{i\pi z}\right)}{4z^2}$$

La integral la expresa como sigue

$$\oint_\gamma\frac{cosh\left(e^{i\pi z}\right)}{z^3-4z^2}\ dz=\oint_\gamma\left[\frac{cosh\left(e^{i\pi z}\right]}{16(z-4)}-\frac{cosh\left(e^{i\pi z}\right)}{16z}-\frac{cosh\left(e^{i\pi z}\right)}{4z^2}\right]dz\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\underbrace{\frac{1}{16}\oint_\gamma\frac{cosh\left(e^{i\pi z}\right)}{z-4}dz}_{I}+\underbrace{\left(\frac{-1}{4}\right)\oint_\gamma\frac{cosh\left(e^{i\pi z}\right)}{z^2}dz}_{II}+\underbrace{\left(\frac{-1}{16}\right)\oint_\gamma\frac{cosh\left(e^{i\pi z}\right)}{z}dz}_{III}$$

$$I=\frac{i\pi}{8}cosh\left(e^{i\pi 4}\right)=\frac{i\pi}{8}cosh(1)$$

$$II=\frac{-1}{4}\cdot\frac{i2\pi}{1!}\cdot senh\left(e^{i\pi 0}\right)\cdot e^{i\pi 0}\cdot i\pi=\frac{\pi^2}{2}senh(1)$$

$$III=\frac{-i\pi}{8}cosh(1)$$

Respuesta:

$$\oint\limits_{|z-2|=3}\frac{cosh\left(e^{i\pi z}\right)}{z^3-4z^2}\ dz=\frac{\pi^2}{2}senh(1)$$

Ejercicio 2: *Sea $f(z)$ una función entera tal que $\forall\ z\ f(z) \neq 0$ y γ una curva de Jordan cualquira en $\mathbb{C}$. Calcular la siguiente integral.*

$$I = \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z^3(4z+2)^2} dz$$

Solución:

Digamos

$$g(z) = \frac{f(z)}{z^3(4z+2)^2} = f(z) \cdot \frac{1}{z^3(4z+2)^2}$$

Desarrollemos las fracciones parciales del término racional.

$$\frac{1}{z^3(4z+2)^2} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z^2} + \frac{c}{z^3} + \frac{d}{(4z+2)} + \frac{e}{(4z+2)^2}$$

$$1 = z^2\left(16z^2+16z+4\right)a + z\left(16z^2+16z+4\right)b + \left(16z^2+16z+4\right)c + \left(4z^4+2z^3\right)d + z^3 e \Rightarrow$$
$$1 = (16a+4d)z^4 + (16a+16b+2d+e)z^3 + (4a+16b+16c)z^2 + (4b+16c)x + 4c \Rightarrow$$

$$16a+4d = 0 \ \Rightarrow\ 4d = -16\cdot 3 \ \Rightarrow\ d = \tfrac{-4\cdot4\cdot3}{4} \ \Rightarrow\ \boxed{d=-12}$$
$$16a+16b+2d+e = 0 \ \Rightarrow\ e = -3\cdot16+16+2\cdot12 \ \Rightarrow\ \boxed{e=-8}$$
$$4a+16b+16c = 0 \ \Rightarrow\ 4a-16+4 = 0 \ \Rightarrow\ \boxed{a=3}$$
$$\left.\begin{array}{r} 4b+16c = 0 \\ 4c = 1 \ \Rightarrow\ \boxed{c = \dfrac{1}{4}} \end{array}\right\} \quad 4b+4 = 0 \ \Rightarrow\ \boxed{b=-1}$$

Entonces

$$\frac{1}{z^3(4z+2)^2} = \frac{3}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{4z^3} - \frac{12}{4z+2} - \frac{8}{(4z+2)^2}$$

Ahora expresemos la función como sigue

$$g(z) = \frac{f(z)}{z^3(4z+2)^2} = \frac{3f(z)}{z} - \frac{f(z)}{z^2} + \frac{f(z)}{4z^3} - \frac{12f(z)}{4z+2} - \frac{8f(z)}{(4z+2)^2} = \frac{3f(z)}{z} - \frac{f(z)}{z^2} + \frac{f(z)}{4z^3} - \frac{3f(z)}{(z+\frac{1}{2})} - \frac{f(z)}{2(z+\frac{1}{2})^2}$$

Podemos expresar la integral de la siguiente manera

$$I = \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z^3(4z+2)^2} dz = \oint\limits_{\gamma} \frac{3f(z)}{z} dz - \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z^2} dz + \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{4z^3} dz - \oint\limits_{\gamma} \frac{3f(z)}{(z+\frac{1}{2})} dz - \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{2(z+\frac{1}{2})^2} dz$$

Aqui es cuando debemos recordar que la fórmula integral de Cauchy no mira los residuos de la función, solo ve el número donde se anula el denominador además la función "parece comportarse bien"para cualquier valor de z, entonces

$$I = i2\pi\left[\frac{3f(0)}{0!} - \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!4} - \frac{3f(\frac{-1}{2})}{0!} - \frac{1}{2}\cdot\frac{f'(\frac{-1}{2})}{1!}\right] =$$
$$= i\pi\left[6f(0) - 2f'(0) + \frac{f''(0)}{4} - 6f\left(\frac{-1}{2}\right) - f'\left(\frac{-1}{2}\right)\right]$$

Respuesta:

$$I = \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z^3(4z+2)^2} dz = i\pi\left[6f(0) - 2f'(0) + \frac{f''(0)}{4} - 6f\left(\frac{-1}{2}\right) - f'\left(\frac{-1}{2}\right)\right]$$

Ejercicio 3: *Calcular la siguiente integral compleja*

$$\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{dz}{(z^2 - i2)}$$

Solución:

Lo primero es ver cuales son las raíces del denominador y poder relacionar esa información con la región de integración, esto se resuelve usando la fórmula de Môivre.

$$z^2 - i2 = 0 \;\Rightarrow\; z^2 = i2,\; w = i2 = 2e^{\frac{i\pi}{2}(4k+1)};\; k = 0,1 \;\Rightarrow w^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left[e^{\frac{i\pi}{2}(4k+1)}\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\cdot e^{\frac{i\pi}{4}(4k+1)} = z$$

$$z_0 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (1+i)$$

$$z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{i5\pi}{4}}$$

Llevamos los radianes a grados para poder estudiarlos, ver su equivalente restando 360° para que el grado caiga en el intervalo $[-\pi, \pi)$ y luego los regresamos a radianes.

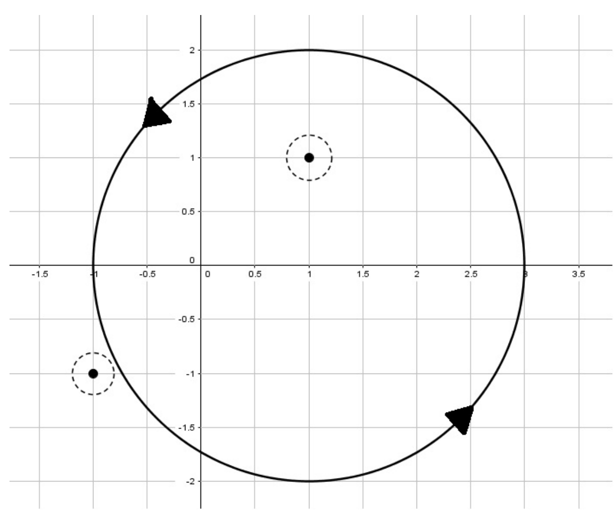
$$\frac{5\pi}{4}\cdot\frac{180°}{\pi} = 225° \;\Rightarrow\; 225° - 360° = -135°,\; \Rightarrow\; -135°\cdot\frac{\pi}{180°} = \frac{-3\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

El grado 225° se pasa de $[-\pi, \pi)$ si lo viéramos como radianes, por eso le restamos 360° y entonces pasó a estar en el tercer cuadrante, específicamente 45 grados a la izquierda del eje imaginario negativo. Con toda esta información podemos decir

$$z_1 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -(1+i)$$

$$\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{dz}{[z-(1+i)]\,[z+(1+i)]}$$

Pasemos a dibujar la región de integración.



El punto $-(1+i)$ no esta dentro de la región de integración lo que permite expresar la integral de la siguiente manera.

$$\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{dz}{[z-(1+i)]\,[z+(1+i)]} = \oint\limits_{\gamma} \frac{[z+(1+i)]^{-1}\,dz}{z-(1+i)} = \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-(1+i)} =$$

$$= i2\pi f(1+i) = i2\pi\,[(1+i)+(1+i)]^{-1} = i\pi\frac{1}{(1+i)} = \frac{i\pi(1-i)}{2} = \frac{\pi(1+i)}{2}$$

Respuesta:

$$\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{dz}{(z^2-i2)} = \frac{\pi(1+i)}{2}$$

Se invita al lector a realizar los cálculos cuando la región de integración abarca al polo contrario al que consideramos y también cuando la rigión abarca ambos polos a la vez.

Ejercicio 4: *Calcular la siguiente integral de variable real.*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2acos(\theta) + a^2}, \quad si\ |a| < 1, a \in R$$

Solución:

Existe toda una teoría orientada a resolver ejercicios como estos, esta es una integral de variable real que va ser resuelta utilizando la variable compleja. Se explicará algo de esa teoría en este ejercicio, pero no contará como una nota teórica. Se deja como tarea al lector estudiar por si mismo este tema.

La idea es modelar esta integral real como una de variable compleja, como ya sabemos toda integral de variable compleja es una integral de línea que se debe realizar sobre una curva que vive en el plano complejo, pues bien, siempre que nos encontremos con una integral real como esta, que tenga como límites de integración $[0, 2\pi]$, podemos llevarla a una integral compleja que se realiza sobre la curva $|z| = 1$, porque parecerá de cierta forma que ya esta parametrizada, lo que vamos a hacer es ir a la inversa. De algo que ya parece estar "parametrizado", pasar a la integral de línea directamente y resolverla por los métodos que hemos aprendido, en este caso por la fórmula integral de Cauchy. Así

$$z = \{|z| = 1\} \ \Rightarrow \ z = e^{i\theta}, \ \theta \in [0, 2\pi], \text{ además recuerde que } \bar{z} = z^{-1} \Leftrightarrow |z| = 1 \ \Rightarrow \ \bar{z} = e^{-i\theta}$$

Con esto claro, no será muy difícil ver lo siguiente

$$\begin{cases} cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \ \Rightarrow \ cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ \\ sen(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{i2} = \frac{1}{i2}(z - \bar{z}) = \frac{1}{i2}\left(z - \frac{1}{z}\right) \ \Rightarrow \ sen(\theta) = \frac{1}{i2}\left(z - \frac{1}{z}\right) \end{cases}$$

Volviendo a nuestro ejemplo tenemos

$$cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \ z = e^{i\theta} \ \Rightarrow \ dz = ie^{i\theta}d\theta \ \Rightarrow \ d\theta = \frac{dz}{iz}$$

La integral pasará a verse como

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2acos(\theta) + a^2} = \oint_{|z|=1} \frac{zdz}{zi\left(-az^2 + (1 + a^2)z - a\right)} = i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{az^2 - (1 + a^2)z + a}$$

Para un mejor análisis de la misma factorizaremos el denominador (además recuerde que queremos usar la fórmula integral de Cauchy).

$$az^2 - (1 + a^2)z + a = 0 \ \Rightarrow \ z = \frac{(a^2 + 1) \pm \sqrt{(a^2 + 1)^2 - 4a^2}}{2a} = \frac{a^2 + 1 \pm \sqrt{a^4 + 2a^2 + 1 - 4a^2}}{2a} =$$

$$= \frac{a^2 + 1 \pm \sqrt{a^4 - 2a^2 + 1}}{2a} = \frac{a^2 + 1 \pm \sqrt{(a^2 + 1)^2}}{2a} = \frac{a^2 + 1 \pm \left|a^2 - 1\right|}{2a} = \frac{a^2 + 1 \pm (a^2 - 1)}{2a} \ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{a^2+1+a^2-1}{2a} = a \ \Rightarrow \ z = a \\ z_2 = \frac{a^2+1-a^2+1}{2a} = \frac{1}{a} \ \Rightarrow \ z = \frac{1}{a} \end{cases}$$

Tenga presente que a estos factores se les debe multiplicar por el factor a. Entonces

$$az^2 - (1 + a^2)z + a = a(z - a)\left(z - \frac{1}{a}\right) \ \Rightarrow$$

$$I = i \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{a(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)} = i \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)(az-1)}$$

En la región de integración pedida cualquier punto que esté en $[-1, 1]$ puede ser un polo de primer orden, ya que a puede tomar cualquiera de esos valores (esto esta representado en el enunciando del ejercicio como $|a| < 1$), entonces el integrando tiene un polo de primer oren en $z = a$, solamente ahí. Sabiendo esto expresemos la integral de la siguiente manera.

$$I = i \oint\limits_{|z|=1} \frac{(az-1)^{-1}dz}{z-a}$$

Aplicando la fórmula integral de Cauchy

$$I = i2\pi \left(\frac{i}{aa-1}\right) = \frac{2\pi}{1-a^2}$$

Respuesta:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2acos(\theta)+a^2} = \frac{2\pi}{1-a^2}$$

Integrales reales indefinidas resueltas con variable compleja

Ejercicio 1: *Resolver la siguiente integral*

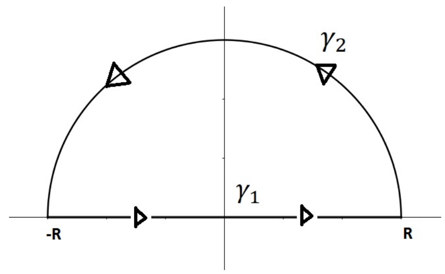
$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 4a^4},\ a \in \mathbb{R},\ a > 0$$

Solución:

i) Me invento una función compleja que pueda manipular en un futuro y hacer que se parezca a la del integrando, además determino una región de integración conveniente.

Se sabe que $cos(0.\,z) = 1$, entonces $e^{ibz} = e^{i.0.z} = 1\ \ para\ b = 0$, entonces

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 4a^4},\ \gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$



$$\oint_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

ii) Expreso la integral sobre γ_1 como una integral real y expreso la integral sobre γ_2 como una integral parametrizada (en realidad la integral sobre γ_1 también está parametrizada solo que su parte imaginaria es cero). Parametrizando γ_2 tenemos

$$z = z(\theta) = Re^{i\theta},\ \theta \in [0, \pi]\ \Rightarrow\ dz = iRe^{i\theta}d\theta$$

$$\underbrace{\oint_\gamma \frac{dz}{(z^4 + 4a^4)}}_{I} = \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{e^{ibx}dx}{x^4 + 4a^4}}_{II} + \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}d\theta}{R^4e^{i4\theta} + 4a^4}}_{III}$$

iii)Resolvemos I por el método de los residuos.

$$\oint_\gamma \frac{dz}{(z^4 + 4a^4)} = i2\pi \sum ResF(z)$$

Factorizamos el denominador del integrando

$$z^4 + 4a^2 = (z^2 + 2az + 2a^2)(z^2 - 2az + 2a^2) = 0$$

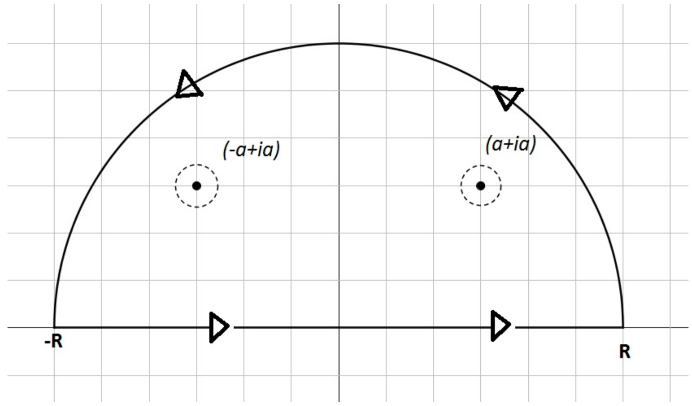
Habría que factorizar ambos polinomios usando resolvente, y eso es lo que haremos

$$z_{1,2,3,4} = \frac{\pm 2a \pm \sqrt{4a^2 - 8a^2}}{2} = \frac{\pm 2a \pm \sqrt{-4a^2}}{2} = \pm a \pm ia\ \Rightarrow \begin{cases} z_1 = a + ia \\ z_2 = -a + ia \\ z_3 = a - ia \\ z_4 = -a - ia \end{cases}$$

Entonces

$$\oint_\gamma \frac{dz}{(z^4 + 4a^4)} = \oint_\gamma \frac{dz}{(z - (a + ia))(z + (a - ia))(z - (a - ia))(z + (a + ia))}$$

Ahora recordemos que a es un número real positivo, y esto sumado a las expresiones del denominador de la función del integrando nos llevan a considerar mejor la región de integración.



Dada nuestra región de integración vemos que la función cuenta con dos polos simples en $z = a+ia$ y $z = -a+ia$, calculamos los residuos para cada polo.

$$\underset{z=a+ia}{Res} f(z) = \lim_{z\to a+ia} \frac{z-a-ia}{(z^2+2az+2a^2)(z-a-ia)(z-a+ia)} = \frac{1-i}{16a^3}$$

$$\underset{z=a+ia}{Res} f(z) = \lim_{z\to -a+ia} \frac{z+a-ia}{(z-a-ia)(z+a-ia)(z+a+ib)(z-z+ib)} = \frac{-1-i}{16a^3}$$

$$\oint_\gamma \frac{dz}{(z^4+4a^4)} = i2\pi\left[\frac{1-i}{16a^3} - \frac{1+i}{16a^3}\right] = \frac{\pi}{4a^3}$$

iv) Reordenando las integrales

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ibx}dx}{x^4+4a^4} + \int_0^\pi \frac{iRe^{i\theta}d\theta}{R^4e^{i4\theta}+4a^4} = \frac{\pi}{4a^3}$$

v) Tomando el límite cuando $R\to\infty$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ibx}dx}{x^4+4a^4} + \lim_{R\to\infty}\int_0^\pi \frac{iRe^{i\theta}d\theta}{R^4e^{i4\theta}+4a^4} = \frac{\pi}{4a^3}$$

vi) Demostrar que $\lim\limits_{R\to\infty} III = 0$.

Lo que nos disponemos a ha probar requiere resolver primero la integral y luego tomar el $\lim\limits_{R\to\infty}$, pero la integral propiamente resuelta no hace falta, véase que si se resuelve explísitamente la integral III tendremos un área que depende de la variable R, si **a partir de la primera integral** llegamos a deducir una segunda integral cuya función integrando este por encima de la primera (osea la curva de la segunda función esta por encima de la curva de la primera función) entonces tendremos una integral que al resolverla y hacer tender R a infinito si esta da como resultado cero, entonces también la primera integral se volverá cero, por que la segunda siempre es cota superior de la primera.
Para evitar confusiones sobre si la función es negativa o positiva y para utilizar los teoremás de las integrales empezamos tomando el valor absoluto.

$$|III| = \left|\int_0^\pi \frac{iRe^{i\theta}d\theta}{R^4e^{i4\theta}+4a^4}\right| \le \int_0^\pi \left|\frac{iRe^{i\theta}d\theta}{R^4e^{i4\theta}+4a^4}\right| = \int_0^\pi \left|\frac{iRe^{i\theta}}{R^4e^{i4\theta}+4a^4}\right| d\theta = \int_0^\pi \frac{|i||R|\left|e^{i\theta}\right|d\theta}{|R^4e^{i4\theta}+4a^4|} = \int_0^\pi \frac{1.\,R.\,1.\,d\theta}{|R^4e^{i4\theta}+4a^4|} \le$$

$$\le \int_0^\pi \frac{Rd\theta}{||R^4e^{i4\theta}|-|-4a^4||} = \int_0^\pi \frac{Rd\theta}{|R^4-4a^4|}$$

Ciertamente $\left|R^4-4a^4\right| = R^4-4a^4$ ya que $R>\sqrt{2}a$ y esto se debe a que R tiene que ser lo suficientemente grande como para rodear a los polos que tienen dentro de ellos el factor de a.

$$\int_0^\pi \frac{Rd\theta}{|R^4-4a^4|} = \int_0^\pi \frac{Rd\theta}{R^4-4a^4} = \frac{\pi R}{R^4-4a^4}$$

Entonces

$$|III| \leq \frac{\pi R}{R^4-4a^4} \;\Rightarrow\; \lim_{R\to\infty} \frac{\pi R}{R^4-4a^4} = \frac{\pi/R^3}{1-4a^4/R^3} = 0$$

Finalmente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ibx}dx}{x^4+4a^4} + 0 = \frac{\pi}{4a^3} \;\Rightarrow\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(cos(bx)+isen(bx))dx}{x^4+4a^4} = \frac{\pi}{4a^3} \;\Rightarrow\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(bx)dx}{x^4+4a^4} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{isen(bx)dx}{x^4+4a^4} = \frac{\pi}{4a^3} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+4a^4} = \frac{\pi}{4a^3}$$

Véase que la función del integrando es par, esto nos permite hacer lo siguiente

$$2\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+4a^4} = \frac{\pi}{4a^3} \;\Rightarrow\; \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+4a^4} = \frac{\pi}{8a^3}$$

Respuesta:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+4a^4} = \frac{\pi}{8a^3}$$

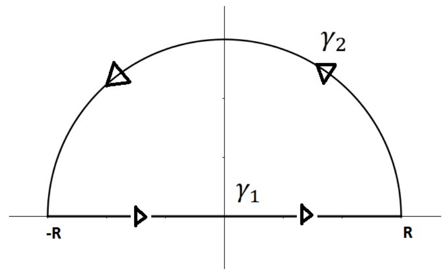
Ejercicio 2: *Calcular la siguiente integral*

$$\int_{0}^{\infty} \frac{xsen(mx)dx}{x^2+a^2} \quad a, m \in \mathbb{R},\ a, m > 0$$

Solución:

i) Me invento una función compleja que pueda manipular en un futuro y hacer que se parezca a la del integrando, además determino una región de integración conveniente.

$$f(z) = \frac{ze^{imz}}{z^2+a^2},\ \gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$



$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

ii) Expreso la integral sobre γ_1 como una integral real y expreso la integral sobre γ_2 como una integral parametrizada.
Parametrizando γ_2 tenemos

$$z = z(\theta) = Re^{i\theta},\ \theta \in [0, \pi] \ \Rightarrow \ dz = iRe^{i\theta}d\theta$$

$$\underbrace{\oint_{\gamma} \frac{ze^{imz}dz}{z^2+a^2}}_{I} = \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{xe^{imx}dx}{x^2+a^2}}_{II} + \underbrace{\int_{0}^{\pi} \frac{Re^{i\theta}e^{imRe^{i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta}{R^2e^{i2\theta}+a^2}}_{III}$$

iii)Resolvemos I por el método de los residuos.

$$\oint_{\gamma} \frac{ze^{imz}dz}{(z^2+a^2)} = i2\pi \sum ResF(z)$$

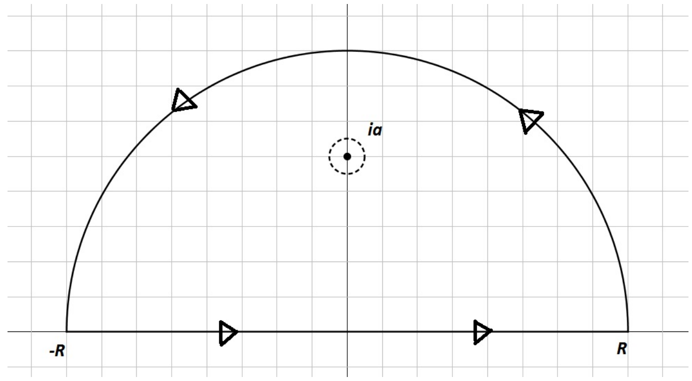
Factorizamos el denominador del integrando

$$z^2+a^2 = 0 \ \Rightarrow \ z^2 = -a^2 \ \Rightarrow \ z = \pm ia \ \Rightarrow \ z^2+a^2 = (z+ia)(z-ia)$$

Entonces

$$\oint_{\gamma} \frac{ze^{imz}dz}{(z^2+a^2)} = \oint_{\gamma} \frac{ze^{imz}dz}{(z-ia)(z+ia)}$$

Ahora recordemos que a es un número real positivo, y esto sumado a las expresiones del denominador de la función del integrando nos llevan a considerar mejor la región de integración.



Dada nuestra región de integración vemos que la función cuenta con un polo simple en $z = ia$, calculamos el residuo para este polo.

$$\underset{z=ia}{Res} f(z) = \lim_{z \to ia} \frac{ze^{imz}(z-ia)}{(z-ia)(z+ia)} = \frac{e^{-am}}{2}$$

iv) Reordenando las integrales

$$\int_{-R}^{R} \frac{xe^{imx}dx}{x^2+a^2} + \int_{0}^{\pi} \frac{Re^{i\theta}e^{imRe^{i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta}{R^2e^{i2\theta}+a^2} = i\pi e^{-am} \Rightarrow \int_{-R}^{R} \frac{xe^{imx}dx}{x^2+a^2} + \int_{0}^{\pi} \frac{iR^2e^{i2\theta}e^{imRe^{i\theta}}}{R^2e^{i2\theta}+a^2} = i\pi e^{-am}$$

v) Tomando el límite cuando $R \to \infty$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{imx}dx}{x^2+a^2} + \lim_{R\to\infty} \int_{0}^{\pi} \frac{iR^2e^{i2\theta}e^{imRe^{i\theta}}}{R^2e^{i2\theta}+a^2} = i\pi e^{-am}$$

vi) Demostrar que $\lim\limits_{R\to\infty} III = 0$.

$$\text{Recuerde que } |i| = 1, \ \left|e^{i(algo)}\right| = 1$$

$$|I| = \int_{0}^{\pi} \left| \frac{iR^2e^{i2\theta}e^{imRe^{e^{i}\theta}}}{R^2e^{i2\theta}+a^2} \right| d\theta \leq \int_{0}^{\pi} \frac{\left|iR^2e^{i2\theta}e^{imRe^{e^{i}\theta}}\right|}{|R^2e^{i2\theta}+a^2|} d\theta = \int_{0}^{\pi} \frac{|i|\left|R^2\right|\left|e^{i2\theta}\right|\left|e^{imRe^{i\theta}}\right|d\theta}{|R^2e^{i2\theta}+a^2|}$$

$$= \int_{0}^{\pi} \frac{R^2\left|e^{imR(cos(\theta)+isen(\theta))}\right|d\theta}{|R^2e^{i2\theta}+a^2|} = \int_{0}^{\pi} \frac{R^2\left|e^{imRcos(\theta)}\right|\left|e^{-mRsen(\theta)}\right|d\theta}{|R^2e^{i2\theta}+a^2|} = \int_{0}^{\pi} \frac{R^2\left|e^{-mRsen(\theta)}\right|d\theta}{|R^2e^{i2\theta}+a^2|} =$$

$$= \int_{0}^{\pi} \frac{R^2\left|e^{-mRsen(\theta)}\right|d\theta}{|R^2e^{i2\theta}-(-a^2)|} \leq \int_{0}^{\pi} \frac{R^2\left|e^{-mRsen(\theta)}\right|d\theta}{||R^2e^{i2\theta}|-|-a^2||} = \int_{0}^{\pi} \frac{R^2\left|e^{-mRsen(\theta)}\right|d\theta}{||R^2|\,|e^{i2\theta}|-a^2|} = \int_{0}^{\pi} \frac{R^2\left|e^{-mRsen(\theta)}\right|d\theta}{|R^2-a^2|}$$

Para que se pueda abarcar el polo $z = ia$ necesariamente $R > a$ entonces $\left|R^2-a^2\right| = R^2-a^2$.

$$\int_{0}^{\pi} \frac{R^2\left|e^{-mRsen(\theta)}\right|d\theta}{|R^2-a^2|} = \int_{0}^{\pi} \frac{R^2\left|e^{-mRsen(\theta)}\right|d\theta}{R^2-a^2} = \int_{0}^{\pi} \frac{R^2\left|1/e^{mRsen(\theta)}\right|d\theta}{R^2-a^2} = \int_{0}^{\pi} \frac{R^2\left(1/e^{mRsen(\theta)}\right)d\theta}{R^2-a^2} =$$

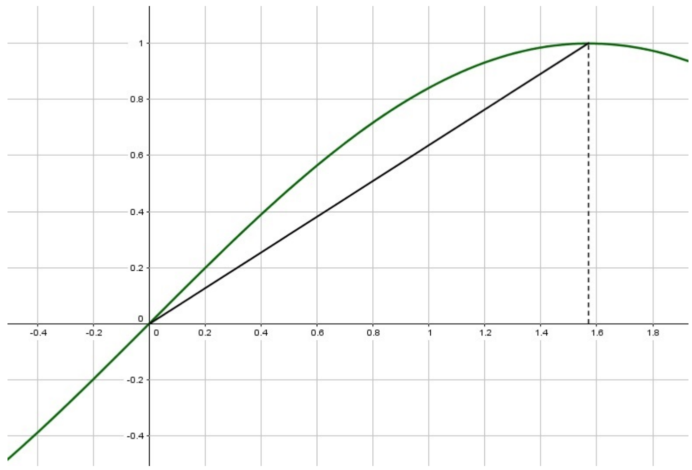
$$= \int_{0}^{\pi} \frac{R^2e^{-mRsen(\theta)}d\theta}{R^2-a^2}$$

El siguiente paso es importante, se pide especial atención. Nuestra demostración se sigue valiendo de encontrar un integrando cada vez más "grande" para que al hacer tender $R \to \infty$ si el área mayor se vuelve cero entonces la menor también lo hará y entonces se demuestra lo pedido.

Véase que $e^{-mRsen(\theta)}$ es una función decreciente y mientras más pequeño se haga es el término $mRsen(\theta)$ entonces más grande se hará la función exponencial.
Nuestro objetivo entonces es disminuir el factor $mRsen(\theta)$. En el intervalo $[0, \pi]$ el seno primero crece y luego decrece, esto puede dificultarnos la tarea, entonces nos valemos de la simetría de la función seno en este intervalo para hacer lo siguiente.

$$\int_0^{\pi} \frac{R^2 e^{-mRsen(\theta)} d\theta}{R^2 - a^2} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^2 e^{-mRsen(\theta)} d\theta}{R^2 - a^2}$$

Entonces para colocar una curva menor a la gráfica del seno en ese intervalo hacemos el siguiente dibujo



La ecuación de la recta bajo la curva del seno es $y = \frac{2\theta}{\pi}$, entonces $\forall\ \theta \in [0, \pi/2]$ se cumple que $sen(\theta) \geq \frac{2\theta}{\pi}$, así

$$sen(\theta) \geq \frac{2\theta}{\pi} \ \Rightarrow\ -mRsen(\theta) \leq \frac{-2mR\theta}{\pi} \ \Rightarrow\ e^{-mRsen(\theta)} \leq e^{-\frac{2mR\theta}{\pi}}$$

Siendo así podemos continuar con la integral

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^2 e^{-mRsen(\theta)} d\theta}{R^2 - a^2} \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^2 e^{-\frac{2mR\theta}{\pi}} d\theta}{R^2 - a^2} = \left[\left(\frac{2}{R^2 - a^2} \right) \cdot \frac{-\pi R^2 e^{-\frac{2mR\theta}{\pi}}}{2mR} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R\pi \left(1 - e^{-mR}\right)}{m\left(R^2 - a^2\right)}$$

Ahora

$$\lim_{R \to \infty} |I| \leq \lim_{R \to \infty} \frac{R\pi \left(1 - e^{-mR}\right)}{m\left(R^2 - a^2\right)} = \lim_{R \to \infty} \frac{\pi \left(1/R - 1/R^2 e^{mR}\right)}{m\left(1 - a^2/R^2\right)} = 0$$

Finalmente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{imx} dx}{x^2 + a^2} + 0 = i\pi e^{-am} \ \Rightarrow\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(cos(mx) + isen(mx))dx}{x^2 + a^2} = i\pi e^{-am} \ \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xcos(mx)dx}{x^2 + a^2} + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xsen(mx)dx}{x^2 + a^2} = 0 + i\pi e^{-am} \ \Rightarrow\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xsen(mx)dx}{x^2 + a^2} = \pi e^{-am}$$

Como la función $\frac{xsen(mx)}{x^2+a^2}$ es par, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xsen(mx)dx}{x^2 + a^2} = \pi e^{-am} \ \Rightarrow\ 2 \int_0^{\infty} \frac{xsen(mx)dx}{x^2 + a^2} = \pi e^{-am} \ \Rightarrow\ \int_0^{\infty} \frac{xsen(mx)dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi e^{-am}}{2}$$

Respuesta:

$$\int_0^{\infty} \frac{xsen(mx)dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi e^{-am}}{2}$$

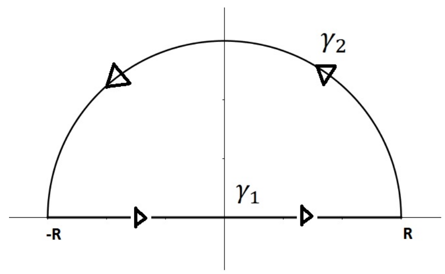
Ejercicio 3: *Resolver la siguiente integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(x)dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)},\ a,b>0$$

Solución:

$i)$ Me invento una función compleja que pueda modelar a la del integrando y determino una región de integración conveniente

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)},\ \gamma=\gamma_1+\gamma_2$$



$$\oint_{\gamma} f(z)dz=\int_{\gamma_1} f(z)dz+\int_{\gamma_2} f(z)dz$$

$ii)$Expreso la integral sobre γ_1 como una integral real y expreso la integral sobre γ_2 como una integral parametrizada. Parametrizando γ_2 tenemos

$$z=z(\theta)=Re^{i\theta},\ \theta\in[0,\pi]\ \Rightarrow\ dz=iRe^{i\theta}d\theta$$

$$\underbrace{\oint_{\gamma}\frac{e^{iz}dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}}_{I}=\underbrace{\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}_{II}+\underbrace{\int_{0}^{\pi}\frac{e^{iRe^{i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta}{\left[\left(Re^{i\theta}\right)^2+a^2\right]\left[\left(Re^{i\theta}\right)^2+b^2\right]}}_{III}$$

$iii)$Resolvemos I por el método de los residuos.

$$\oint_{\gamma}\frac{e^{iz}dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}=i2\pi\sum Resf(z)$$

Factorizamos el denominador

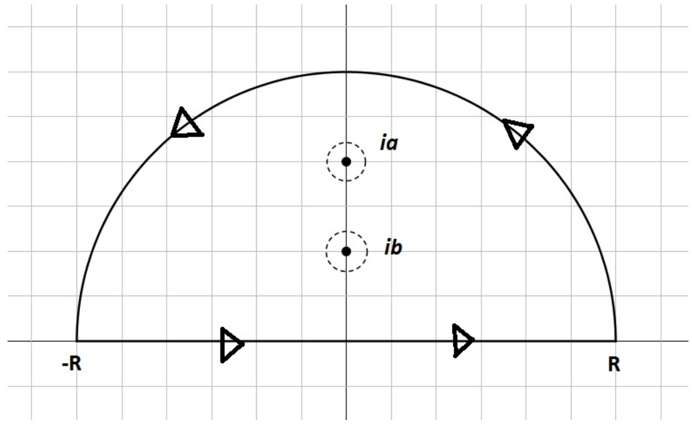
$$(z^2+a^2)(z^2+b^2)=0$$

$$\begin{cases} z^2+a^2=0\ \Rightarrow\ z^2=-a^2\ \Rightarrow\ z=\pm ia \\ z^2+b^2=0\ \Rightarrow\ z^2=-b^2\ \Rightarrow\ z=\pm ib \end{cases}\quad\Rightarrow\ (z^2+a^2)(z^2+b^2)=(z+ia)(z-ia)(z+ib)(z-ib)$$

Entonces

$$\oint_{\gamma}\frac{e^{iz}dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}=\oint_{\gamma}\frac{e^{iz}dz}{(z+ia)(z-ia)(z+ib)(z-ib)}$$

Ahora recordemos que a y b son números reales positivos, y esto sumado a las expresiones del denominador de la función del integrando nos llevan a considerar mejor la región de integración.



No se puede decir realmente si $a > b$, $a < b$ ó $a = b$, eso no se sabe y no esta dicho por el ejercicio, lo que haremos será realizar el estudio con $a \neq b$ y luego al final tomar el resultado obtenido y decir $a = b$ a ver que pasa, la anterior imagen no es más que una imagen genérica para entender donde están los puntos problema en el plano complejo en nuestra región de integración, de ahí podemos ver claramente que $f(z)$ cuenta con dos polos de primer orden en $z = ia$ y $z = ib$, calculemos los residuos de cada uno.

$$\underset{z=ib}{Res} f(z) = \lim_{z\to ib} \frac{(z-ib)e^{iz}}{(z^2+a^2)(z+ib)(z-ib)} = \lim_{z\to ib} \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z+ib)} = \frac{e^{-b}}{((ib)^2+a^2)(ib+ib)} = \frac{e^{-b}}{(a^2-b^2)(i2b)}$$

$$\underset{z=ia}{Res} f(z) = \lim_{z\to ia} \frac{(z-ia)e^{iz}}{(z+ia)(z-ia)(z^2+b^2)} = \lim_{z\to ia} \frac{e^{iz}}{(z+ia)(z^2+b^2)} = \frac{e^{-a}}{(ia+ia)((ia)^2+b^2)} = \frac{-e^{-a}}{(a^2-b^2)(i2a)}$$

Así

$$\oint_\gamma \frac{e^{iz}dz}{(z+ia)(z-ia)(z+ib)(z-ib)} = i2\pi \left[\frac{e^{-b}}{(a^2-b^2)(i2b)} - \frac{e^{-a}}{(a^2-b^2)(i2a)}\right] = \frac{\pi}{a^2-b^2}\left[\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\right]$$

iv) Reordenando las integrales

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} + \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta}{\left[(Re^{i\theta})^2+a^2\right]\left[(Re^{i\theta})^2+b^2\right]} = \frac{\pi}{a^2-b^2}\left[\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\right]$$

v) Tomando el límite cuando $R \to \infty$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} + \lim_{R\to\infty}\int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta}{\left[(Re^{i\theta})^2+a^2\right]\left[(Re^{i\theta})^2+b^2\right]} = \frac{\pi}{a^2-b^2}\left[\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\right]$$

vi) Demostrar que $\lim_{R\to\infty} III = 0$. Esto se deja como ejercicio para el lector, ver el ***ejercicio 2*** para ayuda.

Finalmente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{a^2-b^2}\left[\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\right] \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(x)dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen(x)dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \Rightarrow \frac{\pi}{a^2-b^2}\left[\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\right] + i.0 \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(x)dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{a^2-b^2}\left[\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\right]$$

¿Qué sucede si $a = b$?

Simplemente veo las expresiones que tengo como funciones de algunas de las variables a ó b y tomo el $\lim\limits_{a\to b}$ ó $\lim\limits_{b\to a}$, este caso veremos las expresiones como funciones de a. Así

$$\lim_{a\to b}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cos(x)dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \lim_{a\to b}\frac{\pi}{a^2-b^2}\left[\frac{e^{-b}}{b}-\frac{e^{-a}}{a}\right] \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{cos(x)dx}{(x^2+b^2)^2} = \lim_{a\to b}\frac{\pi}{a^2-b^2}\left[\frac{e^{-b}}{b}-\frac{e^{-a}}{a}\right]$$

Calculamos el límite a parte

$$\lim_{a\to b}\frac{\pi}{a^2-b^2}\left[\frac{e^{-b}}{b}-\frac{e^{-a}}{a}\right] \Rightarrow \pi\lim_{a\to b}\frac{ae^{-b}-be^{-a}}{(a^2-b^2)ab} = \frac{0}{0}$$

Aplicando la regla de L'Hopital, recuerde que se deriva respecto a la variable a.

$$\pi\lim_{a\to b}\frac{ae^{-b}-be^{-a}}{(a^2-b^2)ab} = \pi\lim_{a\to b}\frac{e^{-b}+be^{-a}}{2a(ba)+b(a^2-b^2)} = \pi\lim_{a\to b}\frac{e^{-b}+be^{-a}}{3a^2b-b^3} = \frac{\pi e^{-b}(1+b)}{2b^3}$$

Respuesta:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cos(x)dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \begin{cases}\text{Si } a\neq b \Rightarrow \frac{\pi}{a^2-b^2}\left[\frac{e^{-b}}{b}-\frac{e^{-a}}{a}\right] \\ \\ \text{Si } a=b \Rightarrow \frac{\pi e^{-b}(1+b)}{2b^3} \quad \text{ó} \quad \frac{\pi e^{-a}(1+a)}{2a^3}\end{cases}$$

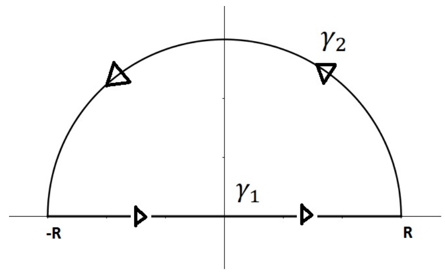
Ejercicio 4: *Resolver la siguiente integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 sen(ax)dx}{(x^2+b^2)^2}, \quad a, b > 0$$

Solución:

i)

$$f(z) = \frac{z^3 e^{iaz}}{(z^2+b^2)^2}$$



$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

ii)

$$z = z(\theta) = Re^{i\theta}, \ \theta \in [0, \pi] \ \Rightarrow \ dz = iRe^{i\theta}d\theta$$

$$\underbrace{\oint_{\gamma} \frac{z^3 e^{iaz}dz}{(z^2+b^2)^2}}_{I} = \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{x^3 e^{iax}dx}{(x^2+b^2)^2}}_{II} + \underbrace{\int_{0}^{\pi} \frac{\left(Re^{i\theta}d\theta\right)^3 e^{iaRe^{i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta}{\left[\left(Re^{i\theta}\right)^2 + b^2\right]}}_{III}$$

iii)

$$\oint_{\gamma} \frac{z^3 e^{iaz}dz}{(z^2+b^2)^2} = i2\pi \sum Res f(z)$$

Factorizamos el denominador

$$z^2 + b^2 = 0 \ \Rightarrow \ z^2 = -b^2 \ \Rightarrow \ z = \pm ib \ \Rightarrow \ (z+ib)(z-ib) = 0 \ \Rightarrow \ (z^2+b^2)^2 = (z+ib)^2(z-ib)^2$$

Dada entonces la región de integración $f(z)$ cuenta con un polo de segundo oren en $z = ib$, calculamos el residuo en este polo.

$$\underset{z=ib}{Res} f(z) = \lim_{z \to ib} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^3(z-ib)^2 e^{iaz}}{(z-ib)^2(z+ib)^2}\right] = \lim_{z \to ib} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^3 e^{iaz}}{(z+ib)^2}\right] = \lim_{z \to ib} \frac{z^2 e^{iaz}\left[3b + (ab-i)z + az^2\right]}{(iz-b)^3}$$

$$Res_{z=ib} f(z) = \frac{e^{-ab}(2-ab)}{4} \quad \Rightarrow \quad \oint_{\gamma} \frac{z^3 e^{iaz}dz}{(z^2+b^2)^2} = \frac{i\pi e^{-ab}(2-ab)}{2}$$

iv)

$$\int_{-R}^{R} \frac{x^3 e^{iax}dx}{(x^2+b^2)^2} + \int_{0}^{\pi} \frac{\left(Re^{i\theta}d\theta\right)^3 e^{iaRe^{i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta}{\left[\left(Re^{i\theta}\right)^2 + b^2\right]} = \frac{i\pi e^{-ab}(2-ab)}{2}$$

v)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 e^{iax}dx}{(x^2+b^2)^2} + \lim_{z \to \infty} \int_{0}^{\pi} \frac{\left(Re^{i\theta}d\theta\right)^3 e^{iaRe^{i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta}{\left[\left(Re^{i\theta}\right)^2 + b^2\right]} = \frac{i\pi e^{-ab}(2-ab)}{2}$$

$vi)$

Finalmente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 e^{iax} dx}{(x^2+b^2)^2} = \frac{i\pi e^{-ab}(2-ab)}{2} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 cos(iax) dx}{(x^2+b^2)^2} + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 sen(iax) dx}{(x^2+b^2)^2} = 0 + i\frac{\pi e^{-ab}(2-ab)}{2}$$

Respuesta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 sen(iax) dx}{(x^2+b^2)^2} = \frac{\pi e^{-ab}(2-ab)}{2}$$

Fín